

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ГІРНИЧИЙ УНІВЕРСИТЕТ**



**МЕХАНІКО-МАШИНОБУДІВНИЙ ФАКУЛЬТЕТ**  
*Кафедра основ конструювання механізмів і машин*

**Взаємний перетин багатогранників і кривих поверхонь.  
Методичні вказівки до виконання індивідуальних завдань**

для студентів дистанційної форми навчання

**Дніпропетровськ  
НГУ  
2014**

Взаємний перетин багатогранників і кривих поверхонь. Методичні вказівки до виконання індивідуальних завдань / О.І. Додатко – Д.: НГУ, 2013. – 44 с.

Затверджено методичною комісією з напрямку 6.050301 Гірництво (протокол № 3 від 14.12.2013) за поданням кафедри основ конструювання механізмів і машин (протокол № 3 від 15.11.2013).

Методичні вказівки призначено для виконання індивідуальних завдань з нарисної геометрії для студентів усіх спеціальностей

Відповідальний за випуск завідувач кафедри основ конструювання механізмів і машин канд. техн. наук, доц. К.А. Зіборов.

## 1.9. ВЗАЄМНИЙ ПЕРЕТИН БАГАТОГРАННИКІВ І КРИВИХ ПОВЕРХОНЬ

Побудову точок лінії взаємного перетину поверхонь виконують різними допоміжними засобами: проєціюючими площинами, площинами загального положення, а також допоміжними січними сферами. Вибір допоміжних засобів визначається формою і положенням поверхонь, які перетинаються.

Перетин поверхонь може бути повний і неповний.

При *повному перетині* поверхонь отримують дві замкнуті лінії взаємного перетину, а при *неповному* – тільки одну ламану або плавну криву.

При взаємному перетині багатогранних поверхонь одержують ламану просторову лінію. В інших випадках (перетин багатогранної й кривої поверхонь, двох кривих поверхонь) одержують плавну криву лінію.

### 1.9.1. Перетин багатогранних поверхонь

Лінія перетину багатогранників визначається побудовою точок перетину ребер одного багатогранника з гранями другого і ребер другого з гранями першого. Внаслідок цього отримують одну або дві просторові ламані замкнуті лінії.

Розглянемо побудову точок лінії перетину багатогранних поверхонь: трикутної призми і піраміди  $SABC$  (рис. 1).

(Нумерація розділів вказана по навчальному посібнику «Інженерна графіка в гірництві» або «Інженерна графіка». Синім кольором на рисунках виконано побудову даного етапу).

1. Для розв'язування цієї задачі ребра призми заключають у фронтально-проєціюючі площини  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ .

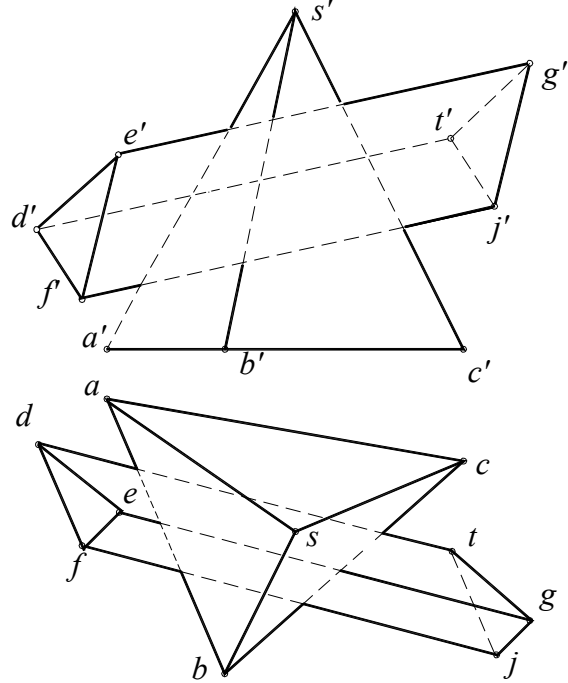


Рис. 1

2. Кожна з цих площин перетинає піраміду з утворенням трикутника, і точки лінії перетину будуть визначатися на перетині цього трикутника з ребром призми. Наприклад, фронтально-проєціююча площина  $P_V$  перетинає піраміду з утворенням трикутника 1, 2, 3.

Тоді горизонтальні проекції  $k_1$  і  $k_2$  точок перетину  $K_1$  і  $K_2$  піраміди ребром призми  $E - G$  будуть знаходитися на перетині горизонтальної проекції 1, 2, 3 трикутника з горизонтальною проекцією  $e - g$  ребра  $E - G$  (рис. 2, а), а фронтальні проекції  $k'_1$  і  $k'_2$  цих точок можна знайти, використовуючи вертикальні лінії проекційного зв'язку (рис. 2, б).

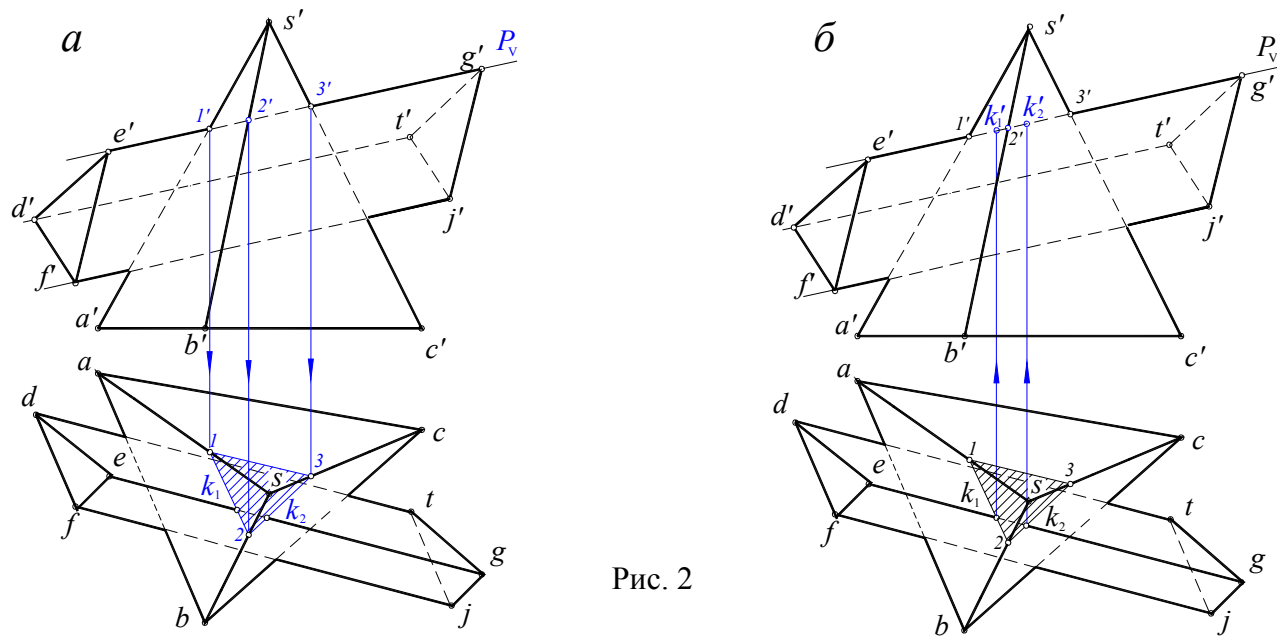


Рис. 2

3. Аналогічно визначають точки  $M_1, M_2$  (рис. 3), і  $L_1, L_2$  (рис. 4), лінії перетину призми з пірамідою.

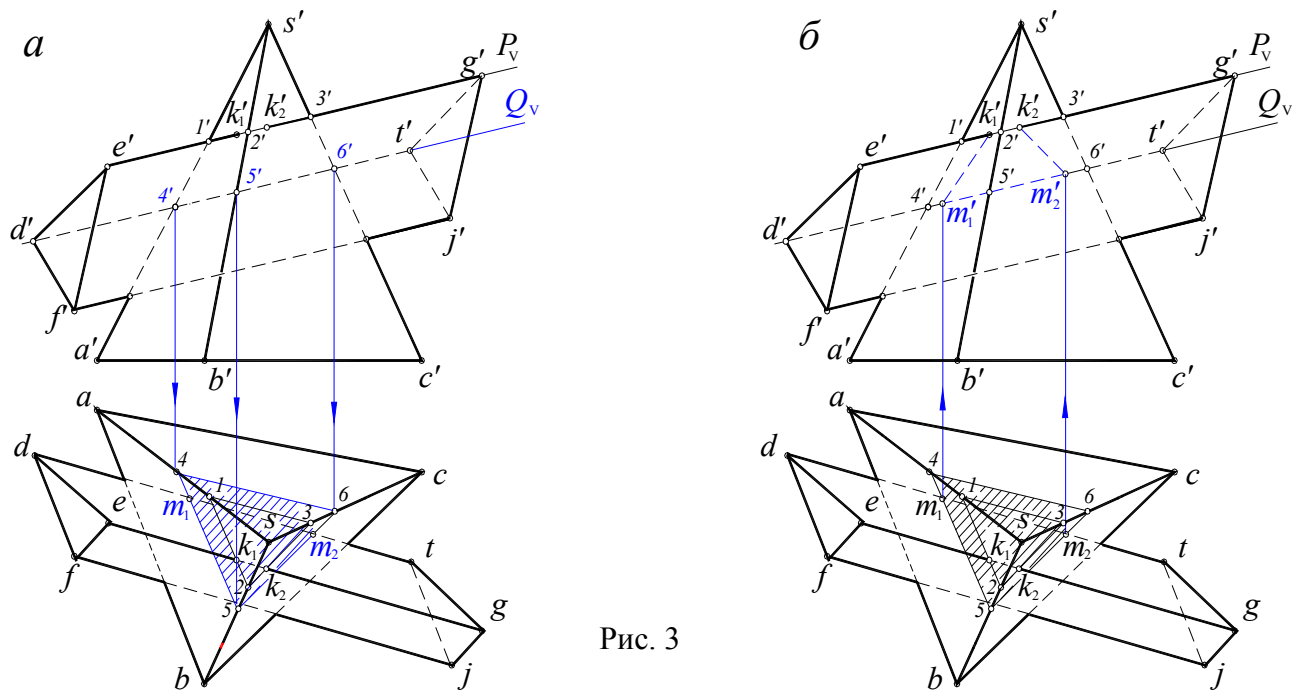


Рис. 3

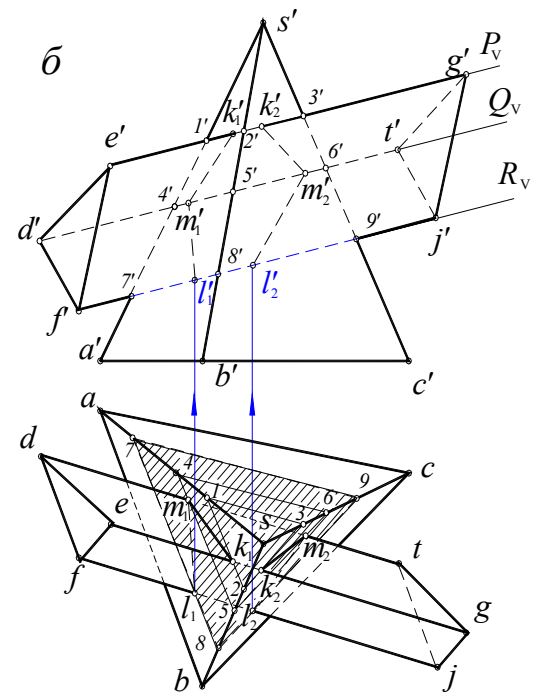
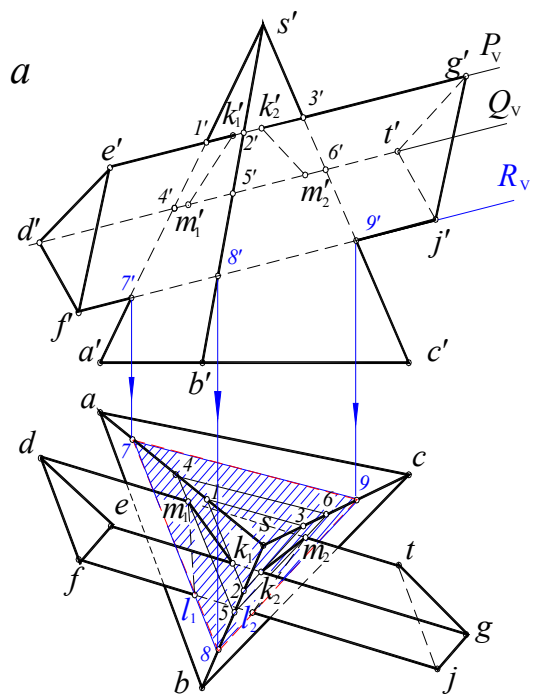


Рис. 4

Так як обидві поверхні багатогранні, то з'єднують одержані точки, мають дві гілки лінії перетину (рис. 5).

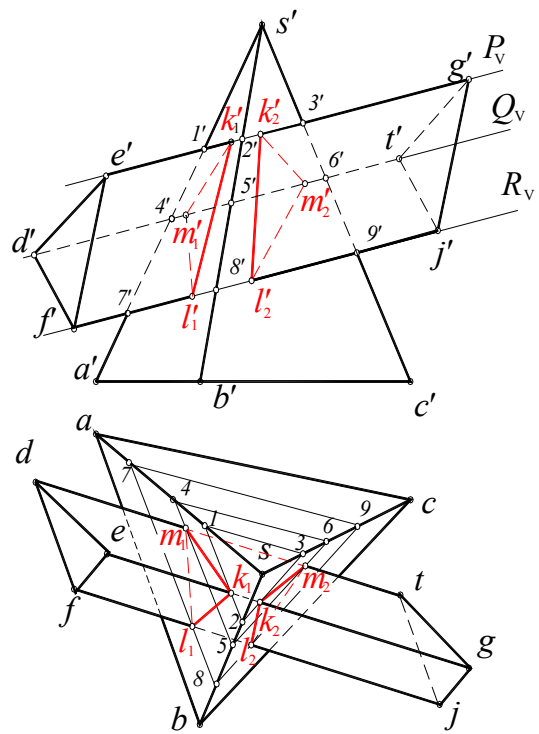


Рис. 5



При визначенні видимості окремих ділянок лінії перетину двох поверхонь треба керуватися таким правилом: *точка перетину двох видимих при проєціюванні на будь-яку площину проєкцій буде також видимою, коли її проєціюють на цю площину; точка перетину двох невидимих або однієї видимої з іншою невидимою лінією – невидима.*

Оскільки всі відрізки, які утворюють гілки лінії перетину, належать як граням призми, так і граням піраміди, то їх видимість визначається видимістю цих граней. Так, на горизонтальній площині всі грані піраміди видимі, а із граней призми невидима тільки одна –  $DTJF$ . Тому на горизонтальній площині проєкцій невидимі будуть тільки відрізки  $l_1 - m_1$  і  $l_2 - m_2$ , які належать лінії перетину.

На фронтальній площині проєкцій видимими будуть дві грані піраміди –  $ASB$  і  $BSC$  та одна грань призми –  $FEGJ$ . Тому видимими будуть тільки відрізки  $K_1 - L_1$  і  $K_2 - L_2$ , які належать цій грані призми.

### **1.9.2. Перетин багатогранних і кривих поверхонь**

Побудову лінії взаємного перетину поверхонь виконують за допомогою визначення точок на поверхнях перетину.

Точки на поверхнях будують за допомогою допоміжних січних площин або допоміжних прямих.

**Задано** – фронтальні проєкції точок  $A$  і  $B$  (рис. 6, *a*).

**Побудувати** – горизонтальні і профільні проєкції цих точок.

Будують профільну проєкцію заданої поверхні (рис. 6, *б*).

Якщо поверхня займає проекційне положення, то побудова спрощується. Точка, яка належить проєціюючій поверхні прямого циліндра (рис. 6, *a*), проєціюється на коло, що є проєкцією циліндра, таким чином: на нижню половину кола, якщо точка видима (точка *A*), і на верхню половину, коли точка невидима (точка *B* береться у дужки на фронтальній і профільній проєкціях рис. 6, *б*).

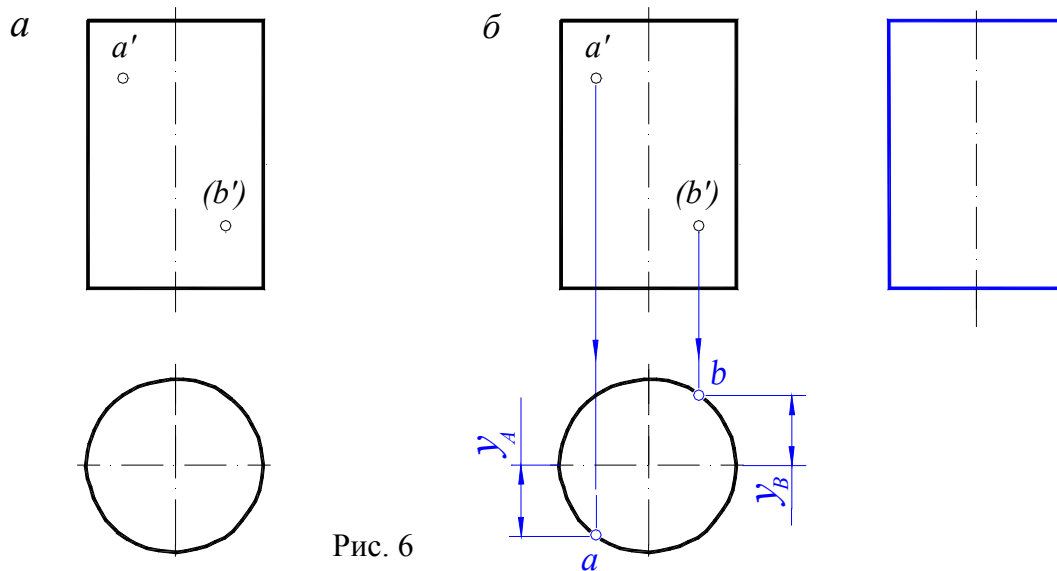


Рис. 6

Профільні проекції  $a''$  і  $b''$  (рис.7) точок визначають за допомогою координат  $Y_A$  і  $Y_B$  відносно осей симетрії так:  $a''$  – праворуч від осі,  $b''$  – ліворуч;  $b''$  – невидима (позначається в дужках), оскільки розташована на задній половині поверхні циліндра.

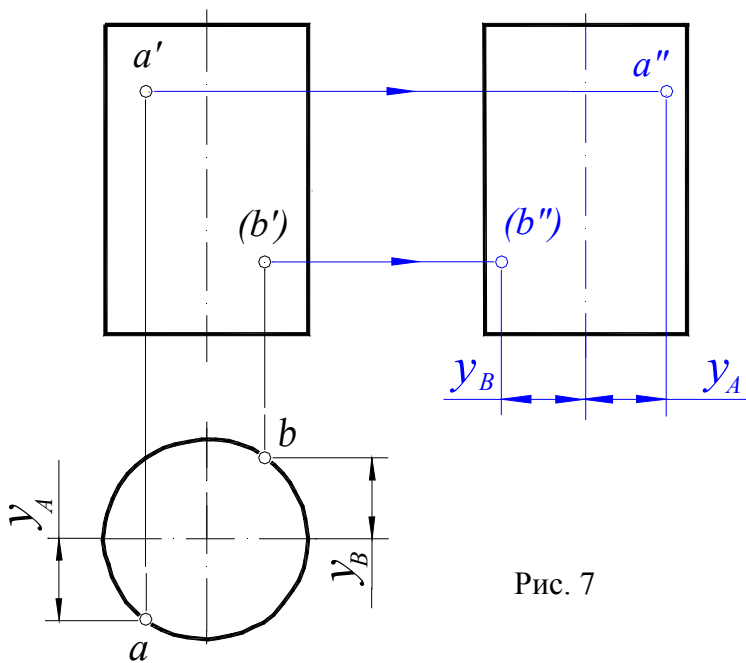


Рис. 7

Точки на поверхні прямого конуса (рис. 8, а) знаходять за допомогою *кола*, яке утворюється внаслідок проходження січної площини  $P$  через задану точку  $A$ , або за допомогою твірної прямої, яка проходить через точку  $B$ , (у даному прикладі вона невидима).

Коло, яке проходить через задану точку  $A$  і розташоване в площині  $P$ , що перпендикулярна осі конуса, проєціюється на фронтальну й профільну проєкції у вигляді прямої, а на горизонтальну проєкцію – у вигляді кола радіусом  $R$  (рис. 8, б).

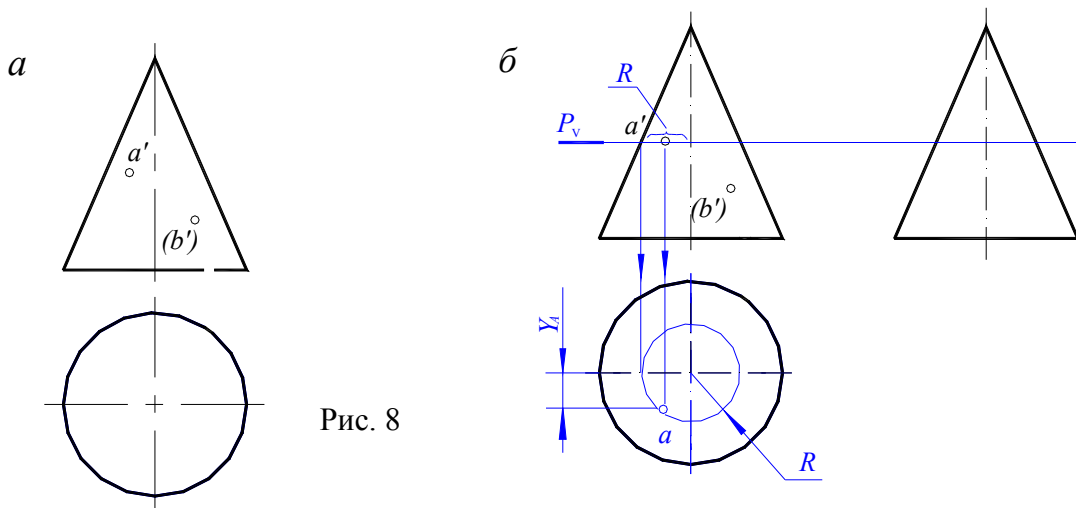


Рис. 8

Оскільки точка  $A$  на фронтальній проекції видима, то на горизонтальній проекції вона буде розташована в нижній частині конуса. Профільну проекцію  $a''$  точки (рис. 9,  $a$ ) будують за двома її проекціями  $a, a'$  і координатою  $Y_A$ .

Профільна проекція  $a''$  точки видима, так як розташована на передній поверхні конуса, ліворуч від осі симетрії.

При побудові проекцій точки за допомогою твірної прямої (рис. 9,  $b$ ), твірну проводять через точку  $B$  (в даному прикладі вона невидима). Ця пряма, перетинаючись з основою конуса, дає фронтальну проекцію  $1'$ . Горизонтальну проекцію точки  $1$  знаходять за вертикальною лінією зв'язку, через цю проекцію проходить горизонтальна проекція твірної прямої. Оскільки фронтальна проекція  $b'$  точки невидима (позначають в дужках), то твірну будують на горизонтальній площині проекцій в верхній частині конуса від осі симетрії, на якій і буде розташована горизонтальна проекція  $b$  точки. Профільну проекцію  $b''$  точки будують за двома її проекціями  $b', b$  і координатою  $Y_B$ .

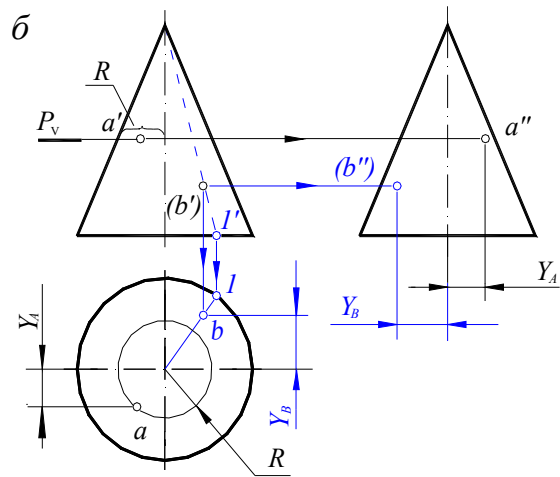
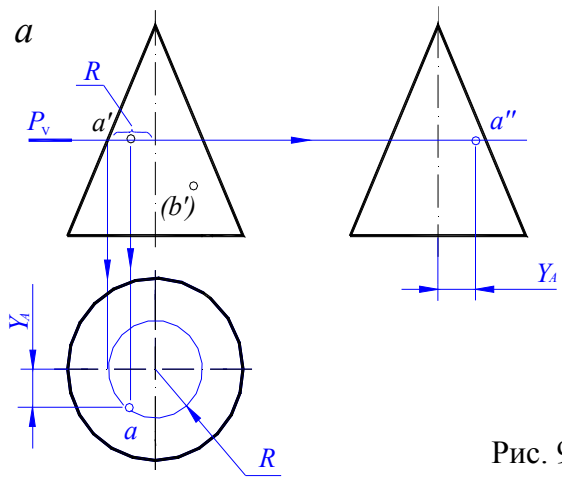


Рис. 9

Точки на поверхні піраміди (рис. 10, *a*) знаходять так само, як і на поверхні конуса. Побудова буде відрізнитися тільки тим, що січна площина  $P$ , яка проходить через точку  $A$ , утворює не коло, а фігуру, що лежить в основі піраміди (на рис. 10, *б* це – квадрат).

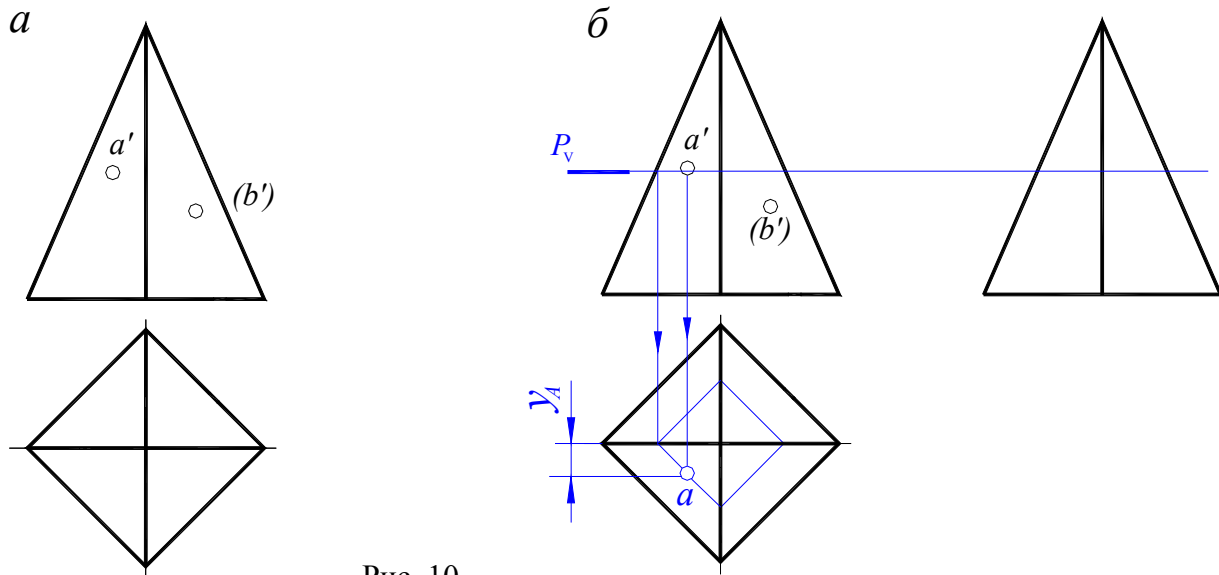


Рис. 10

Профільну проекцію  $a''$  точки (рис. 11, *а*) будують за двома її проекціями  $a$ ,  $a'$  і координатою  $Y_A$ .

Профільна проекція  $a''$  точки видима, так як розташована на передній поверхні конуса, ліворуч від осі симетрії.

При побудові проекцій точки за допомогою твірної прямої (рис. 11, *б*), твірну проводять через точку  $B$  (в даному прикладі вона невидима). Ця пряма, перетинаючись з основою конуса, дає фронтальну проекцію  $1'$ . Горизонтальну проекцію точки  $1$  знаходять за вертикальною лінією зв'язку, через цю проекцію проходить горизонтальна проекція твірної прямої.

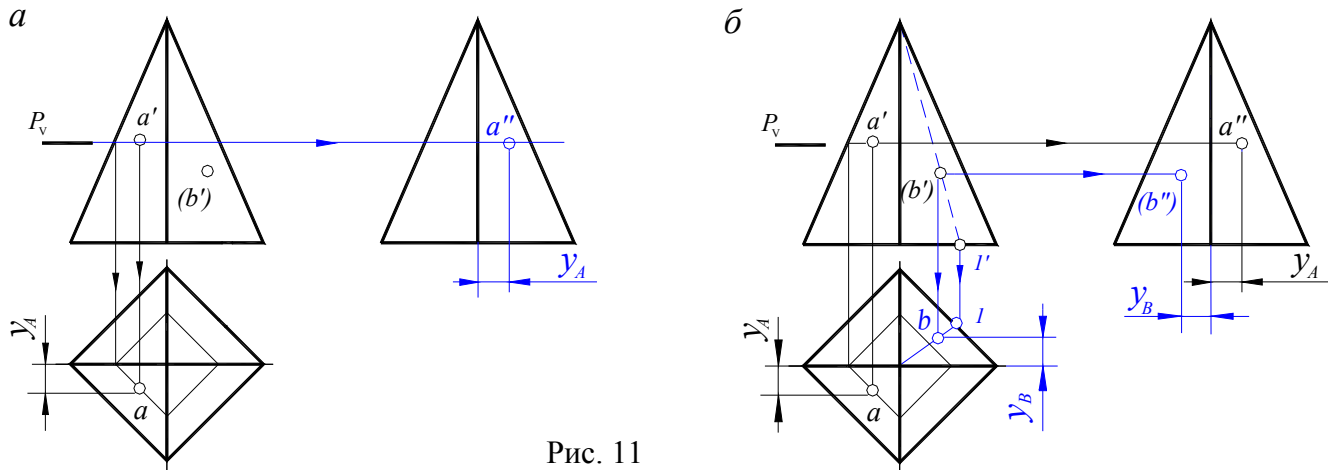


Рис. 11



Точку на поверхні сфери (рис. 12, *a*) будують за допомогою *кола*, яке виникає внаслідок проходження площини  $P$ , через задані точки (рис. 12, *б*). Якщо січна площина розташована перпендикулярно до осі сфери, то вона проєціюється в коло або пряму.

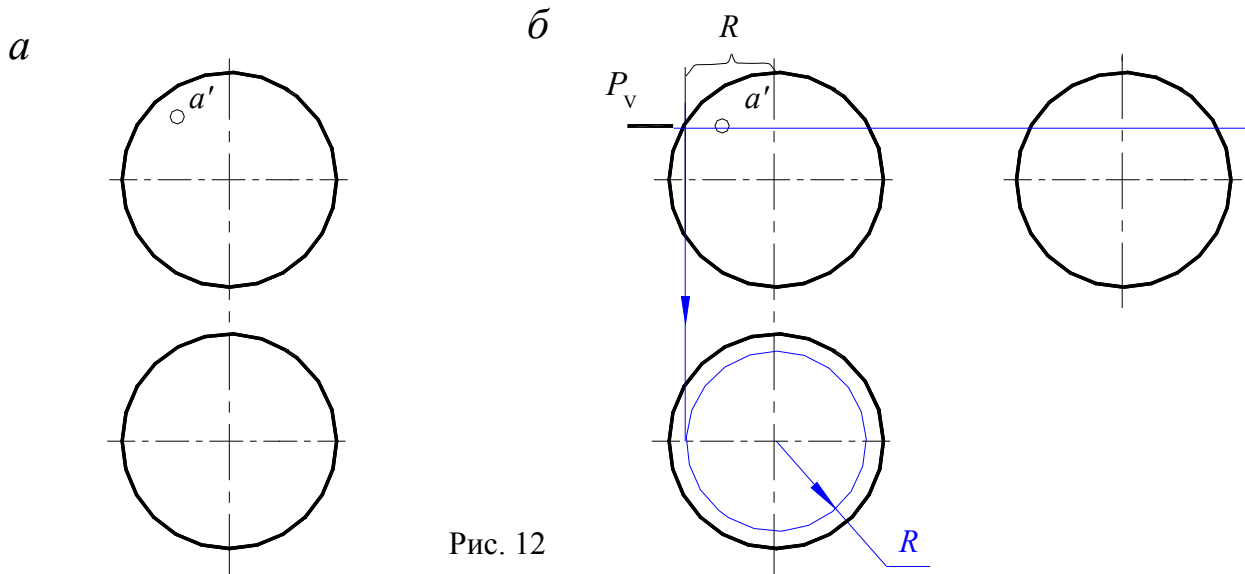


Рис. 12

Горизонтальну проекцію  $a$ , що лежить на сфері, будують на перетині горизонтальній проекції кола радіусом  $R$  і вертикальної лінії зв'язку. Вона знаходиться на нижній половині горизонтальної проекції сфери, так як точка  $A$  видима (рис. 13).

Профільну проекцію  $a''$  точки (рис. 13) будують за двома її проекціям  $a$ ,  $a'$  і координатою  $Y_A$ .

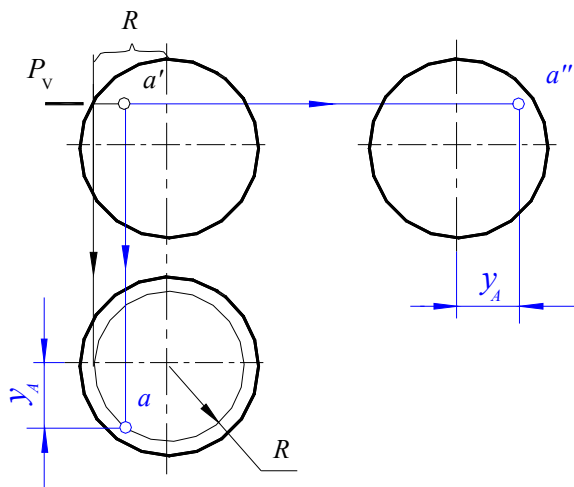


Рис. 13

Отже, для побудови лінії перетину поверхонь застосовують спосіб допоміжних січних площин або поверхонь, суть якого можна сформулювати таким чином:

- а) задані поверхні перетинають третьою допоміжною площиною або поверхнею;
- б) будують лінії перетину допоміжної площини або поверхні з кожною заданою поверхнею;
- в) визначають точки перетину знайдених ліній, ці точки і є шуканими точками лінії перетину поверхонь.

Допоміжну площину розміщують у такому положенні, щоб при перетині її з поверхнями одержати прості лінії перетину – прямі або кола. Розрізняють опорні й випадкові точки лінії перетину. Спочатку визначають опорні точки: найвищі й найнижчі, крайні праві та ліві, точки видимості (точки дотику до контурів проєкцій); що дає можливість визначити межу, в якій потрібно проводити допоміжні січні площини для визначення випадкових точок, що належать лінії перетину (рис. 14).

Приклади побудови лінії взаємного перетину поверхонь:

- 1. Задано** – фронтальну і горизонтальну проєкцію поверхонь (рис. 14, а).  
**Побудувати** – горизонтальну і профільну проєкції заданих поверхонь.

### Рекомендації до виконання

1. Профільну проекцію конуса (рис. 14, б) будують відповідно закону проєціювання (розділ 1.1.4, рис. 1.7, навч. посібник «Інженерна графіка в гірництві» або «Інженерна графіка»).

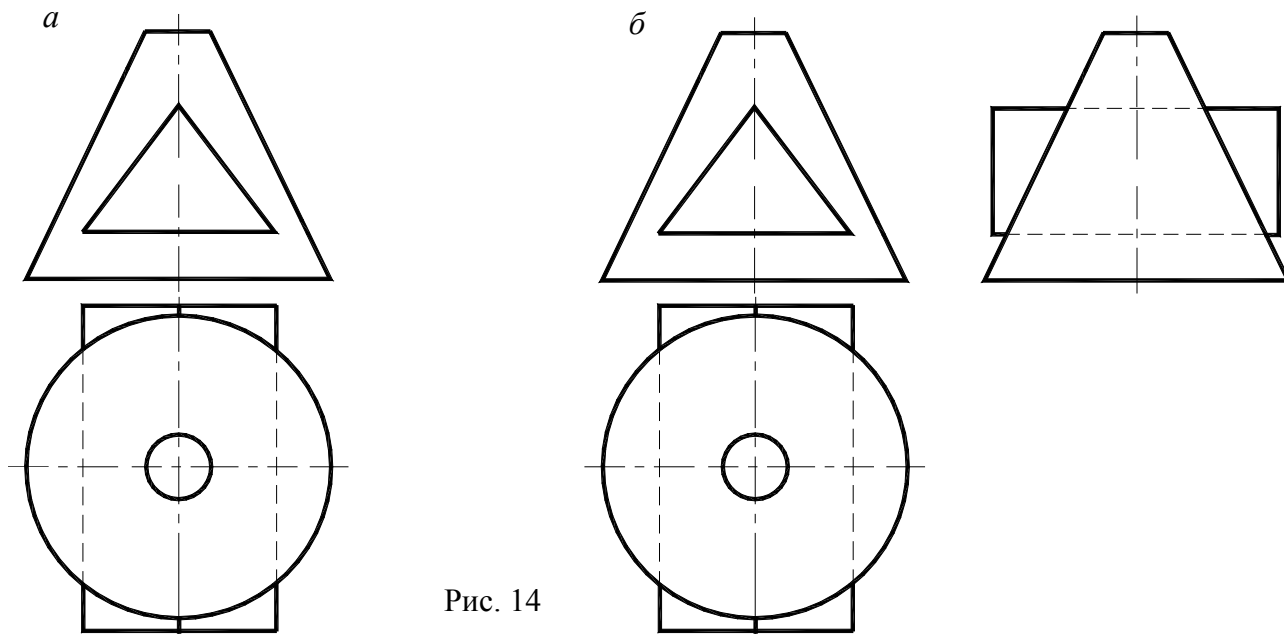


Рис. 14

2. Позначають вершини призми літерами і через одну із вершин (точка 1) проводять січну площину  $P_{V1}$  горизонтального рівня (рис. 15), будують горизонтальну і профільну проєкції точки  $A$  так само, як і на рис. 9.

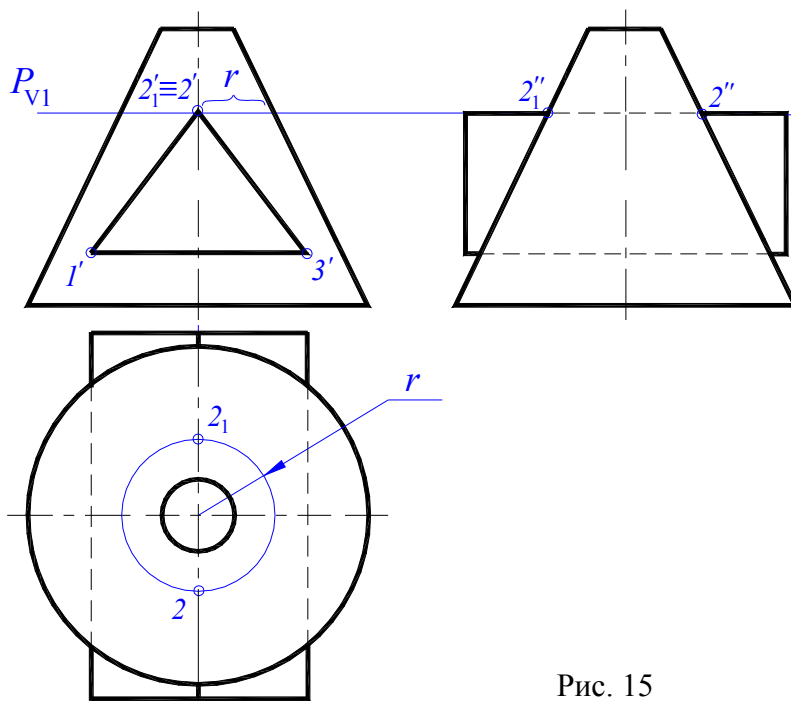


Рис. 15

3. Аналогічно будують точки 1, 3 (рис. 16).

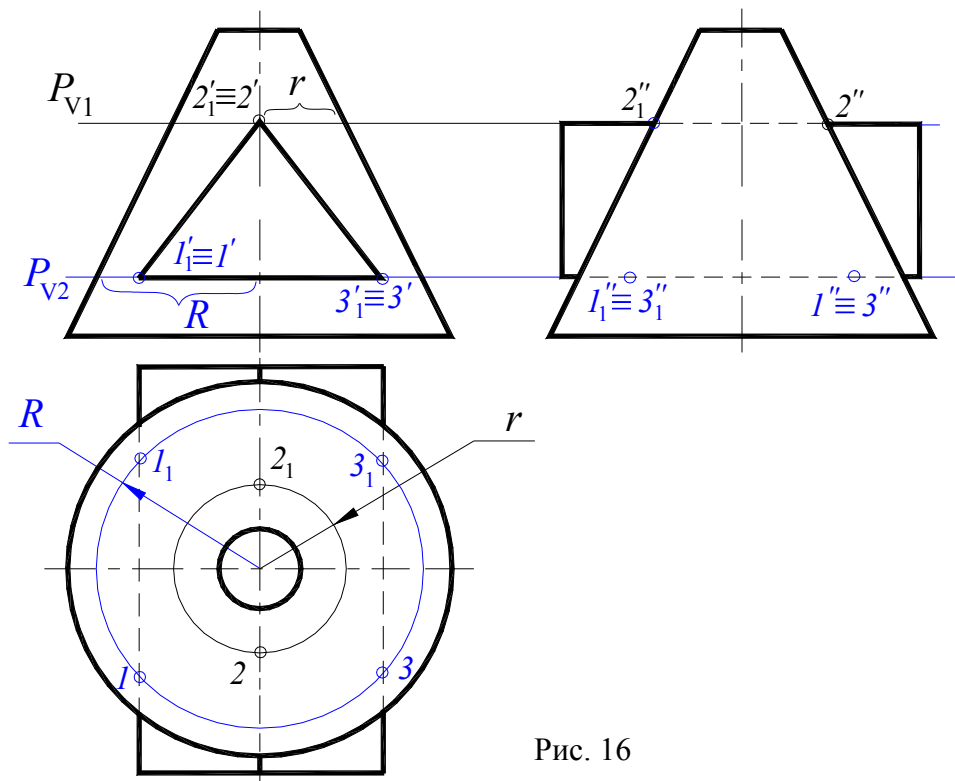


Рис. 16

4. Так як перетинаються пряма поверхня (трьохгранна призма) і крива поверхня (конус), то лінія перетину буде обов'язково кривою, для її побудови розсікають поверхні допоміжними січними площинами на відстані між ними 7...8 мм. (рис. 17).

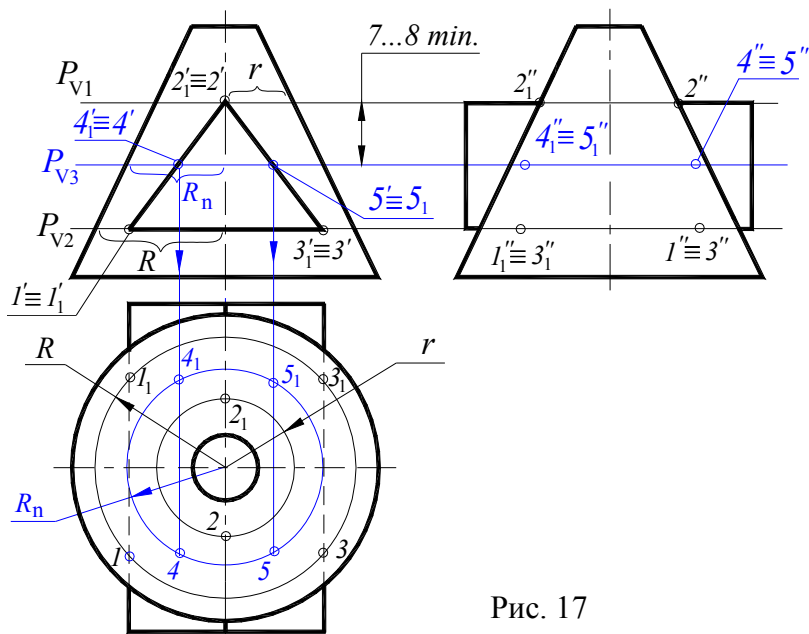


Рис. 17

5. За допомогою лекала з'єднують отримані точки і отримують лінії перетину поверхонь (рис. 18).

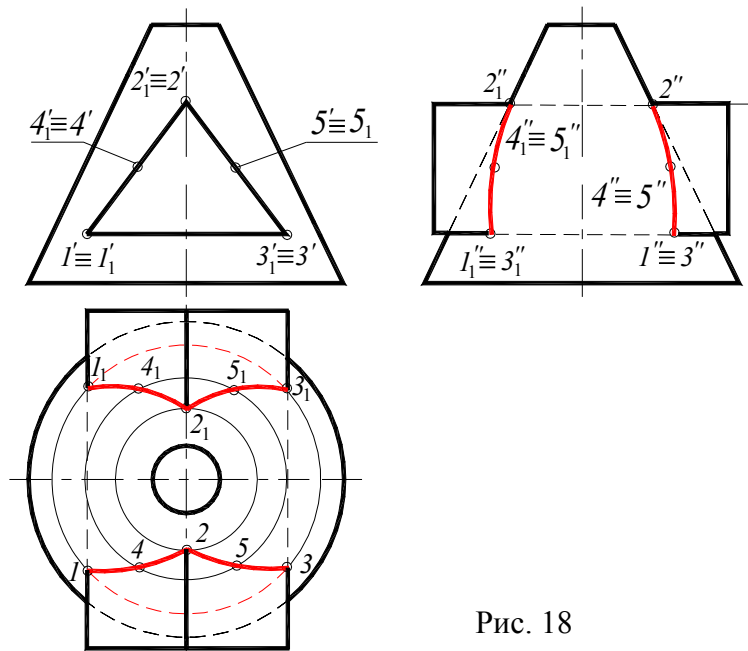


Рис. 18



## Взаємний перетин поверхонь

(приклад виконання завдання – рис. 19, 24)

**Задано:** дві поверхні, що перетинаються  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  та пряму  $l$  (рис. 19, табл. 3.4).

### Визначити:

- 1) три проекції поверхонь, що перетинаються (побудувати лінію перетину поверхонь  $\Phi_1$  і  $\Phi_2$  методом допоміжних площин-посередників);
- 2) точки перетину поверхні  $\Phi_1$  з прямою  $l$ ;
- 3) видимість прямої  $l$  і ділянок поверхонь, що перетинаються.

### Рекомендації до виконання

1. Горизонтальну й фронтальну проекції поверхні  $\Phi_1$  та прямої  $l$  будують згідно з варіантом завдання (табл. 3.4), враховуючи основні розміри (рис. 19), будують профільну проекцію (рис. 20), на основі проекційного зв'язку (розділ 1.1, рис. 1.7).

2. Лінію перетину поверхонь, що перетинаються (рис. 21) будують за точками, методом площин-посередників, для яких беруть площини рівня (розділ 1.9, рис. 1.92, 1.93). Лінія перетину багатогранної та криволінійної поверхонь – ламана, вона складається з відрізків плавних кривих ліній. Точки зламу повинні відповідати точкам перетину ребер багатогранника з криволінійною поверхнею.

Побудову починають із визначення опорних точок. При цьому раціонально вибирати опорні точки на тій площині проекцій, відносно якої отвір або сама поверхня займає проєціююче положення.

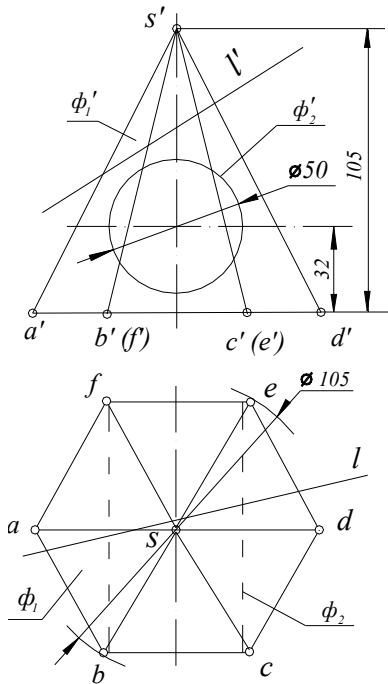


Рис. 19. Вихідні дані завдання 5

Довільні точки вибирають так, щоб кожна криволінійна ділянка лінії перетину будувалася, не менше ніж за трьома точками.

Ряд опорних і довільних точок можна отримати без застосування основного методу побудови лінії перетину, тому точки доцільно будувати на основі належності їх до елементів поверхні (на рис. 21, 22 опорні точки  $K_i$  побудовано за належністю до граней  $[SBC$  і  $SEF]$  піраміди  $\Phi$ , а точки  $G_i$  – до ребер піраміди  $[SB, SC, \dots]$  (рис. 24). Інші точки  $M_i$  (рис. 23, 24) будують методом допоміжних січних площин горизонтального рівня  $T_i$  (розділ 1.9, рис. 1.92 і 1.93).

3. Для побудови точок  $N_1$  й  $N_2$  перетину поверхні  $\Phi_1$  з прямою  $l$  застосовують допоміжну проєціюючу площину, яка проходить через пряму  $l$  (розділ 1.8, рис. 1.88...1.90), у завданні на рис. 24 – це фронтально-проєціююча площина  $P_V$ . Профільну проєкцію прямої  $l''$  будують за проєкціями точок  $N_1$  і  $N_2$  на основі ліній проєкційного зв'язку (розділ 1.1, рис. 1.7).

4. Видимість ділянок поверхні й площини визначають за допомогою конкуруючих точок (розділ 1.2.5 і 1.4.4, рис. 1.18 і 1.37).

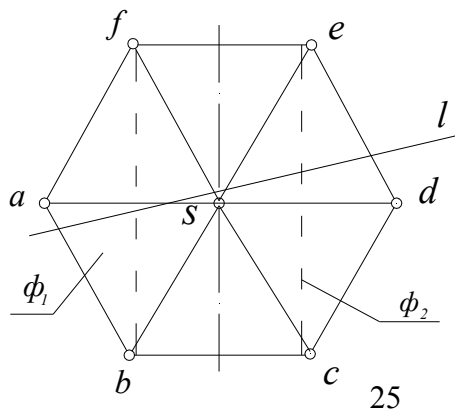
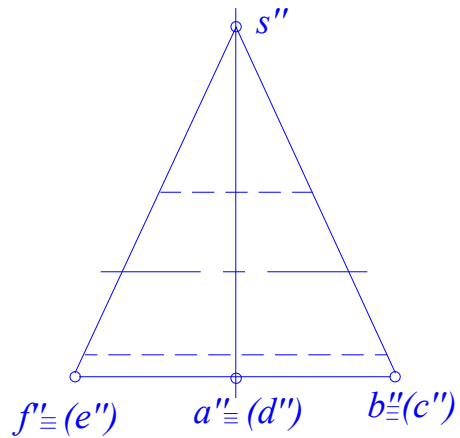
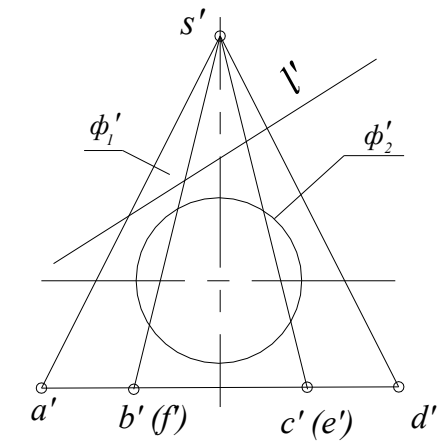


Рис. 20

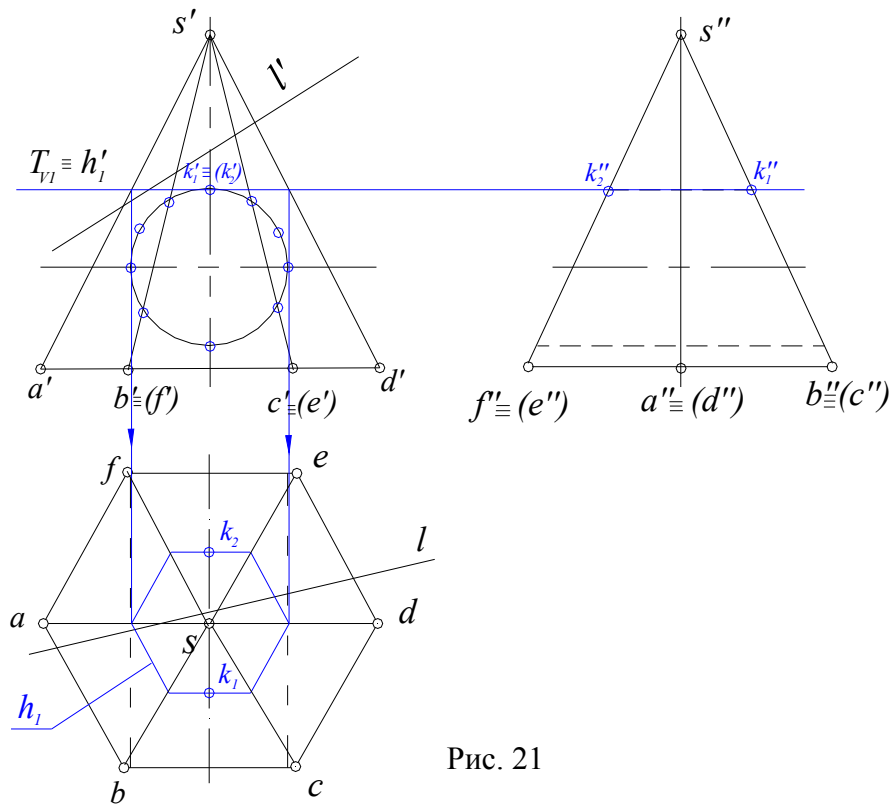


Рис. 21

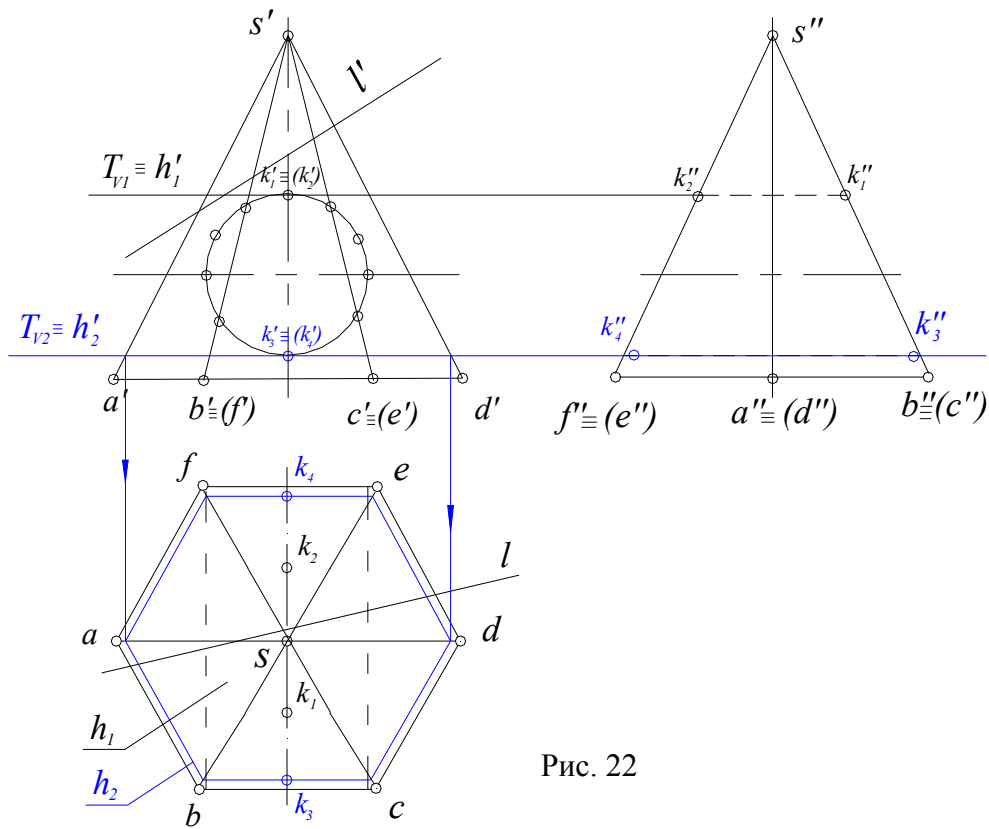


Рис. 22

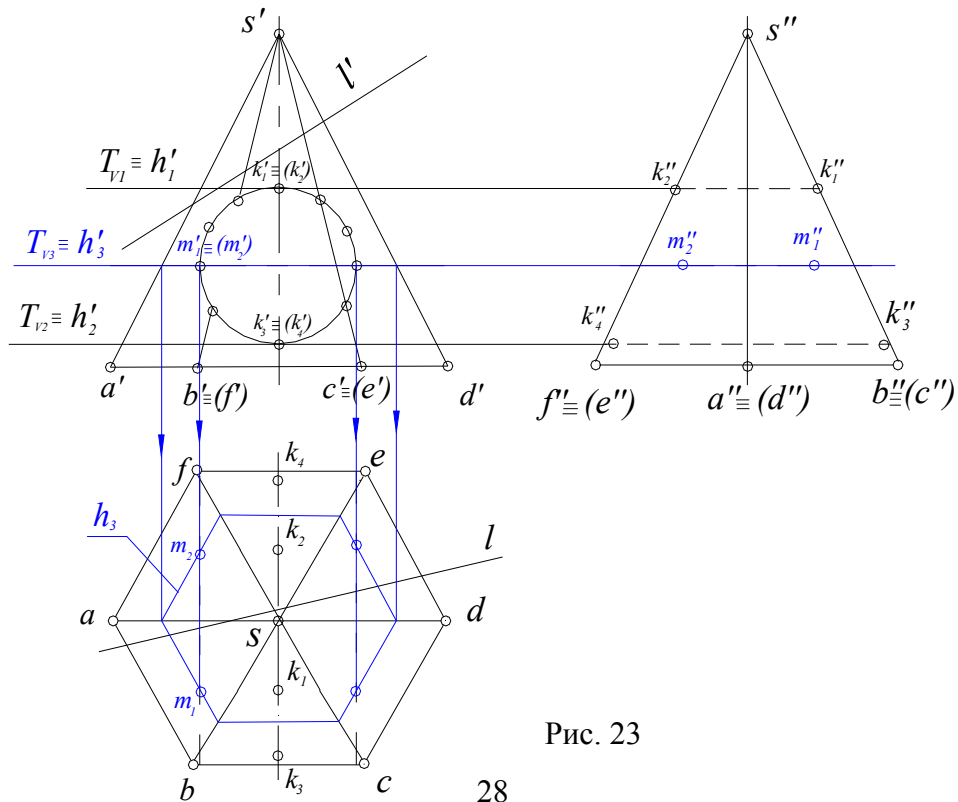


Рис. 23

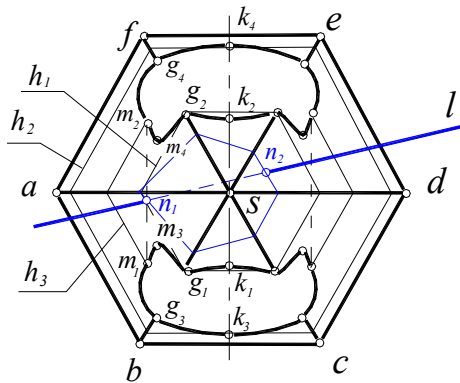
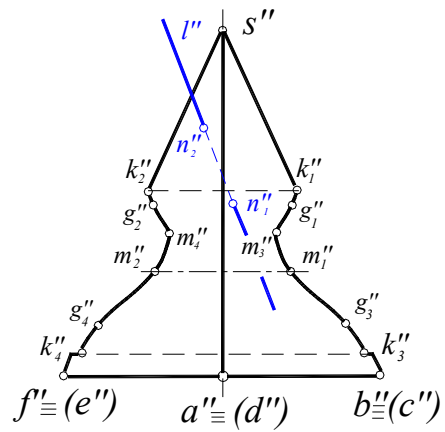
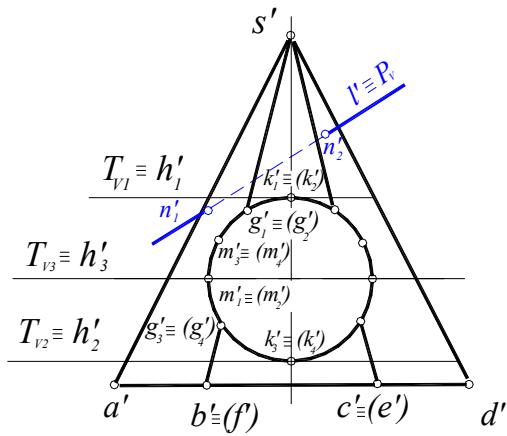


Рис. 24

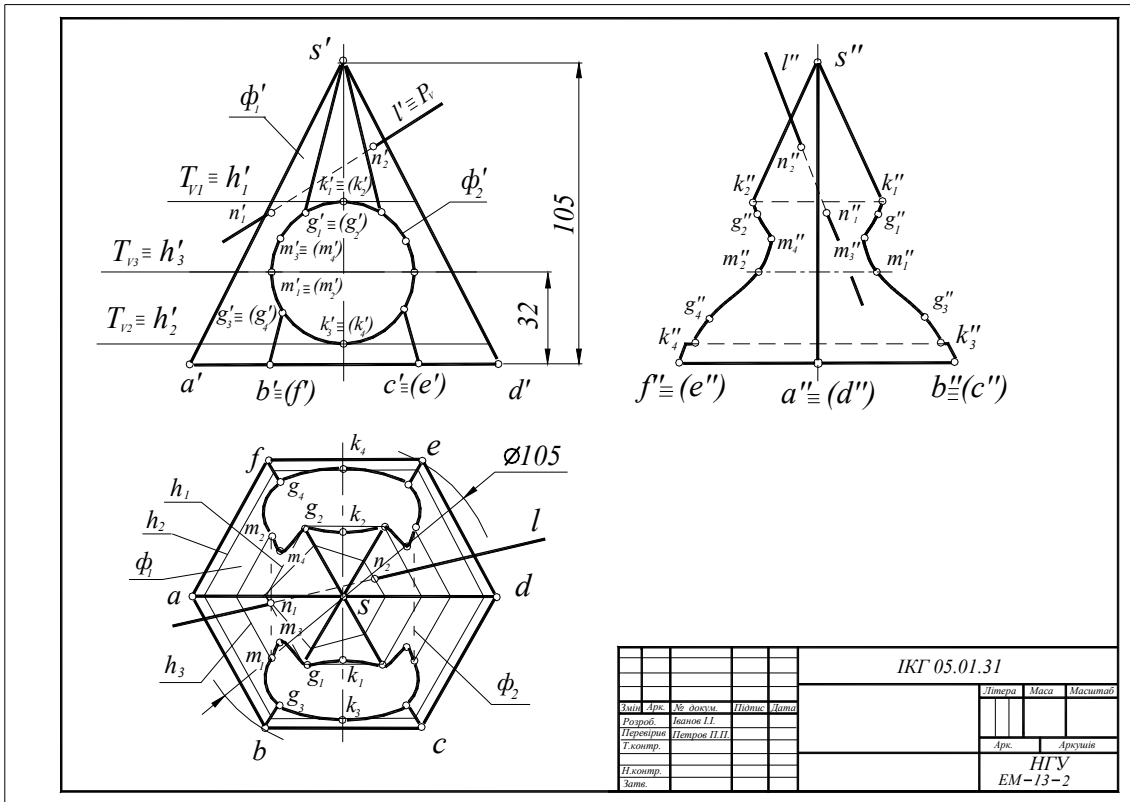


Рис. 25

|           |             |          |         |      |              |         |         |
|-----------|-------------|----------|---------|------|--------------|---------|---------|
|           |             |          |         |      | ИКТ 05.01.31 |         |         |
| Вид       | Арс.        | № докум. | Подпись | Дата | Литера       | Маса    | Масштаб |
| Разроб.   | Танос Г.Г.  |          |         |      |              |         |         |
| Перевірив | Петров П.П. |          |         |      |              |         |         |
| Уконтр.   |             |          |         |      | Арс.         | Архивит |         |
| Уконтр.   |             |          |         |      | НГУ          |         |         |
| Зам.      |             |          |         |      | ЕМ-13-2      |         |         |



### 1.9.3. Перетин поверхонь обертання

При перетині двох поверхонь обертання одержують одну або дві просторові плавні криві.

Для побудови лінії взаємного перетину застосовуються такі способи:

- а) спосіб допоміжних січних площин;
- б) спосіб допоміжних січних сфер.

**Спосіб допоміжних січних площин** являє собою перетин обох поверхонь сімейством площин.

У першу чергу визначають опорні точки лінії перетину  $A$  і  $B$  (рис. 26, б).

Простішою формою перетину конуса і сфери є кола, які одержують при розсіканні допоміжними січними площинами горизонтального рівня. Будують лінії перетину (кола з радіусами  $r$  і  $R$ ) допоміжних площин з кожною поверхнею окремо. Перетин одержаних ліній дає шукані точки лінії взаємного перетину поверхонь (рис. 27, 28).

Одержані точки з'єднують уздовж лекала (рис. 28, б), враховуючи видимість відносно площин проекцій. Видимими будуть ті точки, що одержані при перетині видимих ліній. У точці 2 зміниться видимість відносно горизонтальної площини проекцій  $H$ , оскільки вона знаходиться на екваторі сфери.

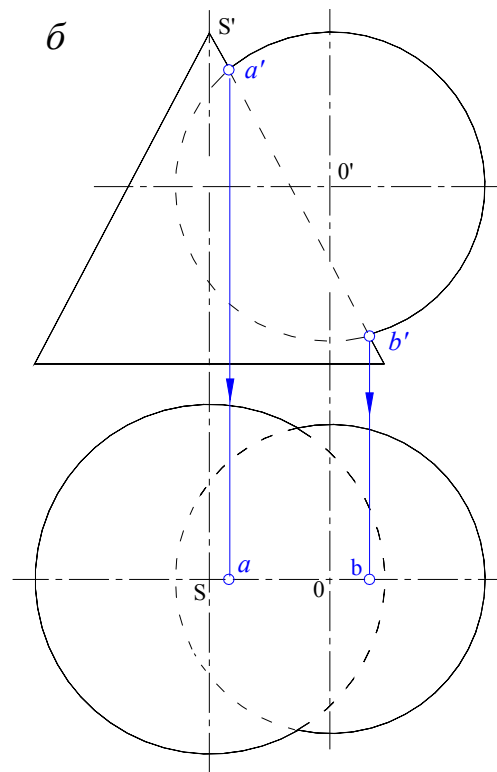
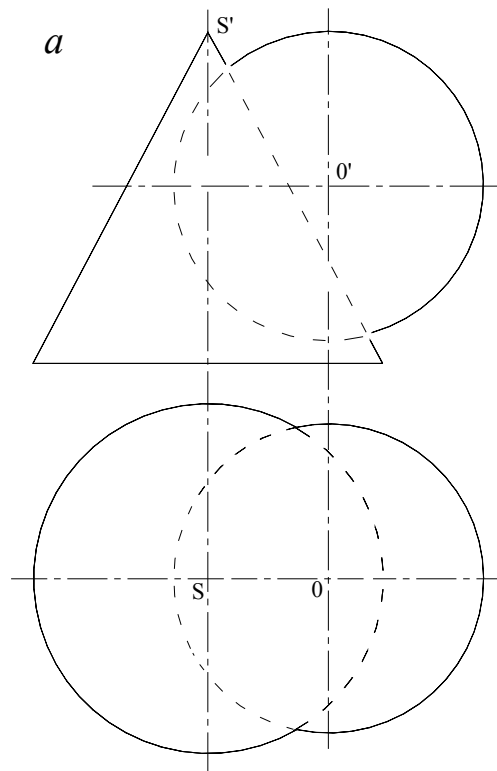


Рис. 26

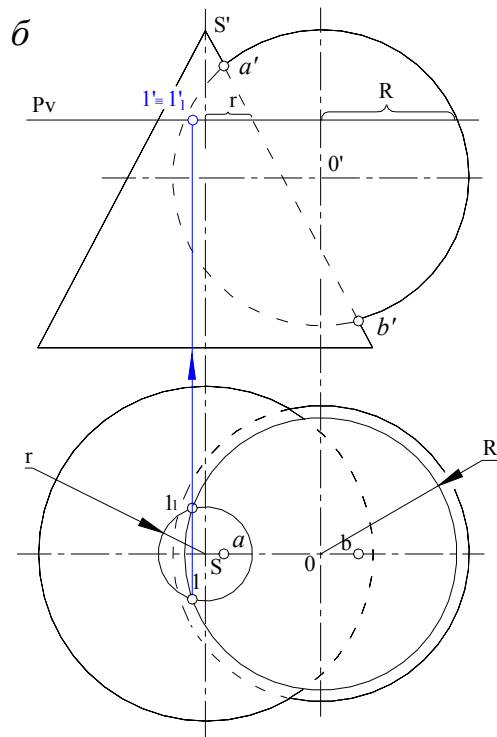
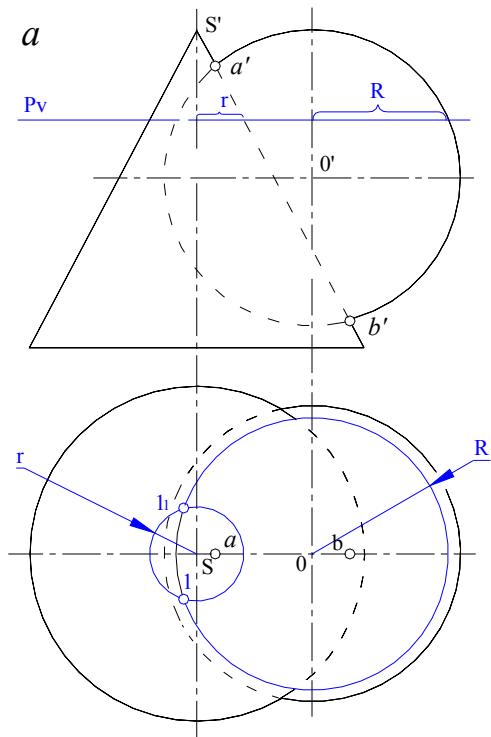


Рис.27

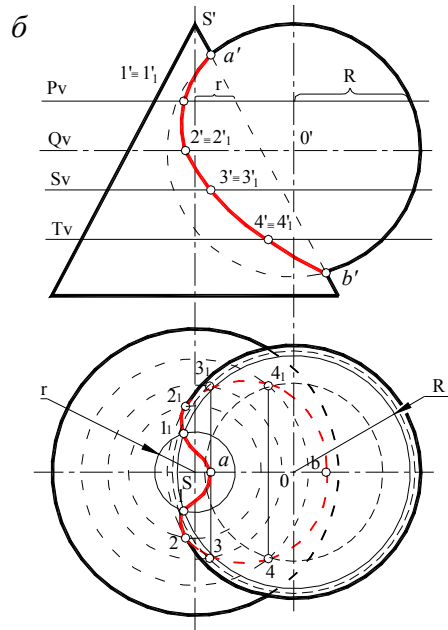
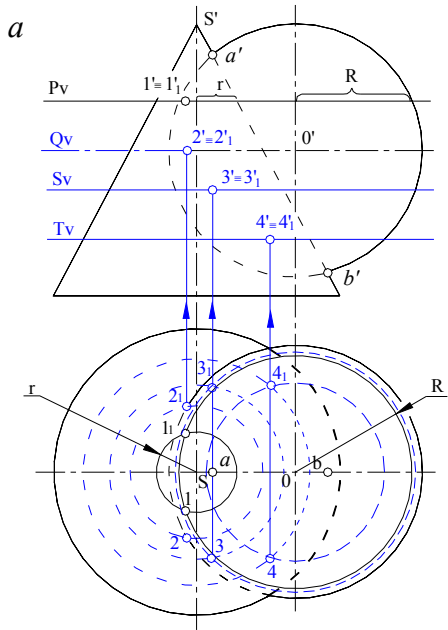


Рис. 28

Остаточний вигляд побудова лінії перетину конуса і сфери (рис. 29)

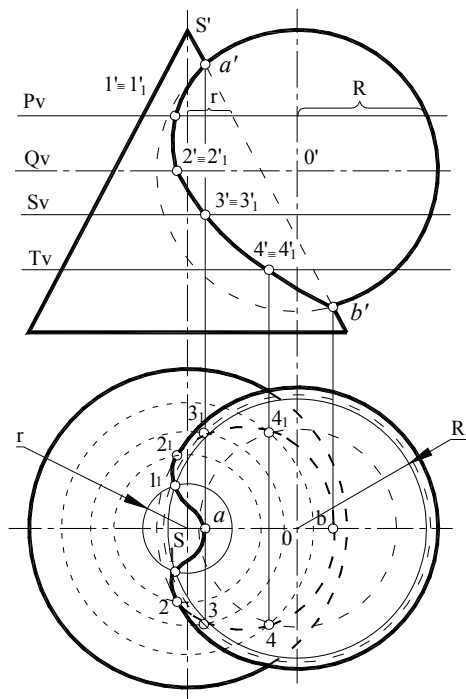


Рис. 29

**Спосіб допоміжних січних сфер** застосовують у тому випадку, коли неможливо задіяти спосіб січних площин. Спосіб передбачає розміщення центра січної сфери на осі поверхні обертання, коли утворені при перетині криві являють собою кола, що проєціюються на площину, паралельну осі поверхні, у вигляді відрізків прямих (рис. 30).

Метод допоміжних січних сфер у порівнянні з методом допоміжних січних площин має ту перевагу, що, наприклад, фронтальну проєкцію лінії перетинання поверхонь (рис. 31) будують без застосування двох інших проєкцій пересічних поверхонь.

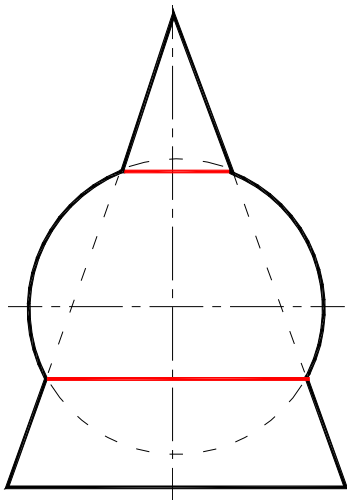


Рис. 30. Використання способу січних сфер

Спосіб допоміжних січних сфер застосовують тільки при виконанні таких умов:

1. Обидві поверхні повинні бути поверхнями обертання.
2. Осі поверхонь мають перетинатись між собою і бути паралельними одній із площин проєкцій.

Сфери можуть бути побудовані таким чином:

- а) з одного центра (*концентричні*);
- б) з різних центрів (*ексцентричні*).

Розглянемо приклади застосування способу концентричних січних сфер.

**Приклад 1.** Побудувати лінію взаємного перетину двох циліндрів способом концентричних сфер, центр яких розташований у точці  $O'$  – фронтальній проекції точки перетину осей обох циліндрів (рис. 31, *a*), виконавши такі дії:

1. У першу чергу, визначають опорні точки лінії перетину  $A$  й  $B$  (рис. 31, *б*), а потім випадкові (рис. 32).

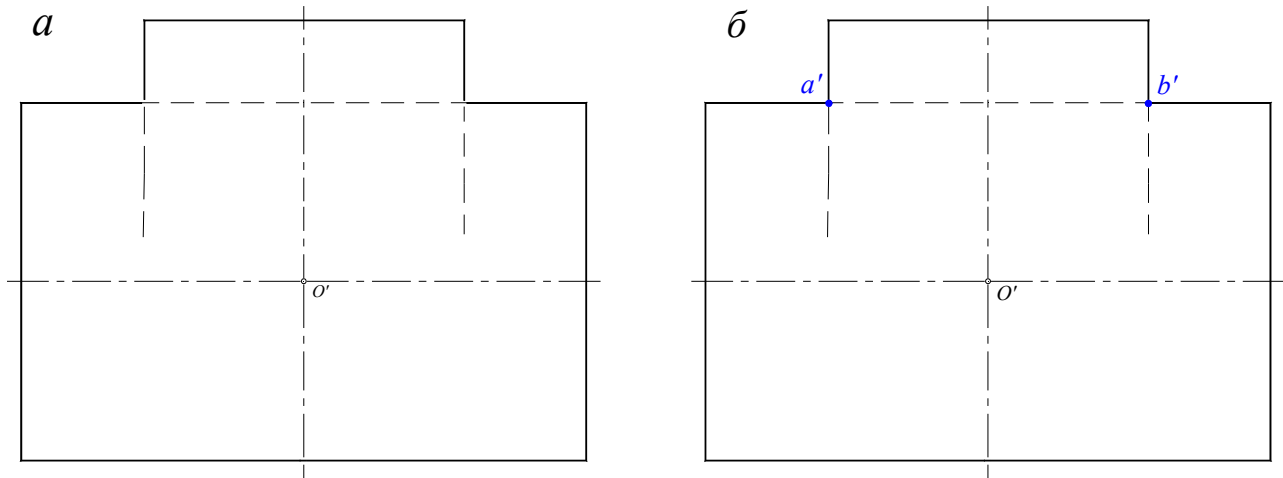


Рис. 31

2. Будують сферу, радіусом  $R_{\min}$ , яка вписана в циліндр більшого діаметра й перетинає поверхні циліндрів у вигляді відрізків прямих  $1' 1'_1$  і  $2' 2'_1$ . Перетин цих відрізків визначає  $c'$  – фронтальну проекцію точки  $C$  лінії взаємного перетину циліндрів (рис. 32).

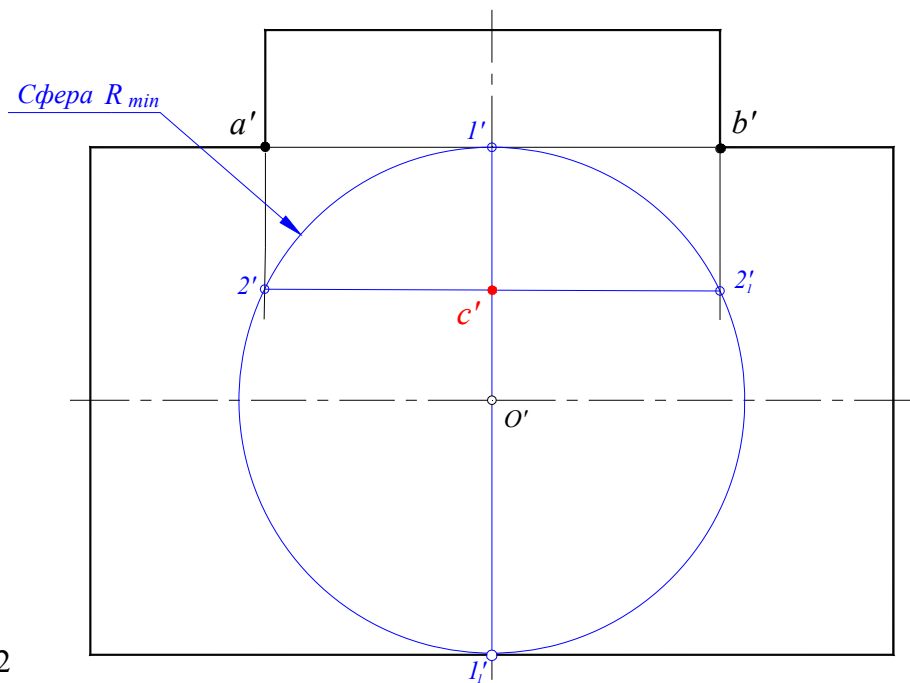


Рис. 32



3. Из точки перетину осей цилиндрів проводять допоміжні січні сфери, радіус яких  $R_{min} < R_n < R_{max}$ .

4. Будують окремо кола, за якими сфери перетинаються з кожною поверхнею. Ці кола проєціюються на фронтальну площину, паралельну осі цилиндрів, у вигляді відрізків прямих. Так, сфера радіуса  $R_n$  перетинає більший цилиндр по прямих  $3' 3'_1$  і  $4' 4'_1$ , менший цилиндр – по прямій  $5' 5'_1$ . У місці перетину цих прямих лежать фронтальні проєкції точок  $D, E$ , розміщених одночасно на лінії взаємного перетину цилиндрів (рис. 33).

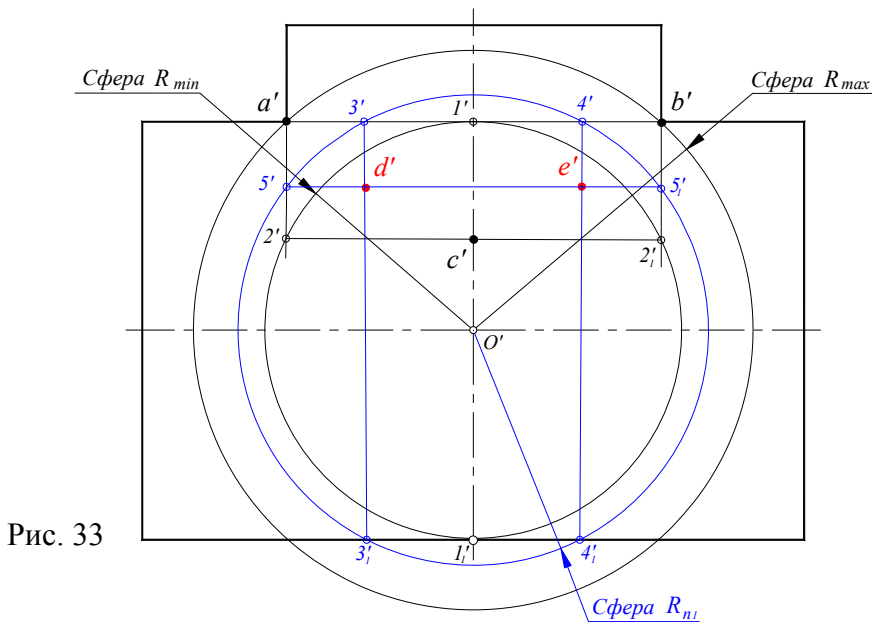


Рис. 33



5. З'єднують по лекалу точки перетину ( $A, D, F, C, G, E, B$ ) побудованих кіл (відрізків прямих), що являють собою точки лінії взаємного перетину двох циліндрів (рис. 35).

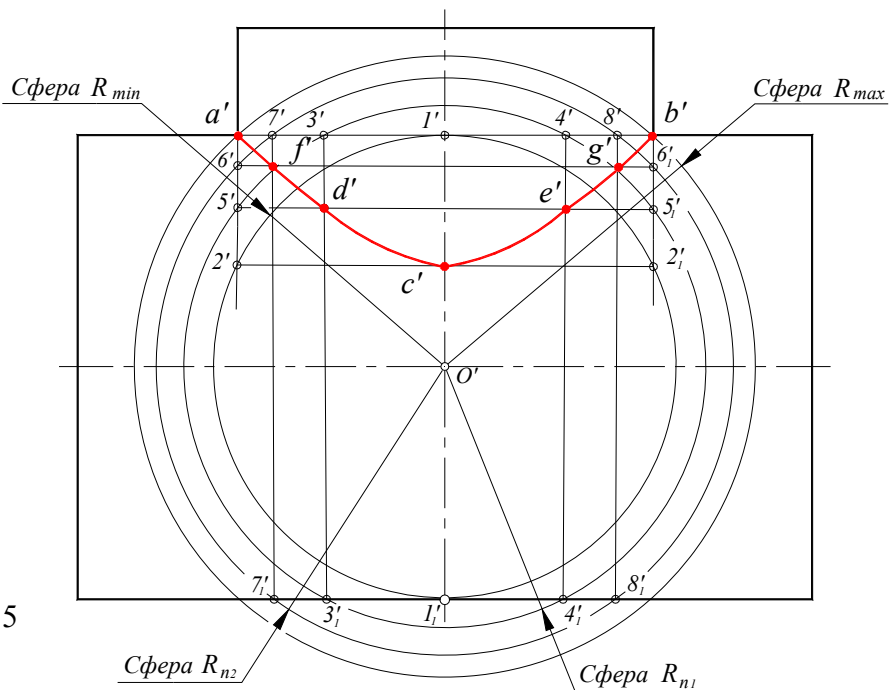


Рис. 35

**Приклад 2.** Побудувати лінії взаємного перетину поверхонь (рис. 36, *a*) способом концентричних сфер, центр яких розташований у точці  $O$  перетину осей обох поверхонь, виконують у такому порядку:

1. Будують ряд концентричних сфер із центром у точці  $O'$  – фронтальної проекції точки перетинання поверхонь обертання. При цьому найбільша окружність сферичної поверхні повинна перетинатися з контурами утворюючих обох поверхонь і дорівнювати відстані до найбільш віддаленої точки перетинання заданих поверхонь ( $R_{\max} = O'I_1'$ ), а найменша окружність сферичної поверхні ( $R_{\min}$ ) повинна бути дотичною до однієї з пересічних поверхонь.

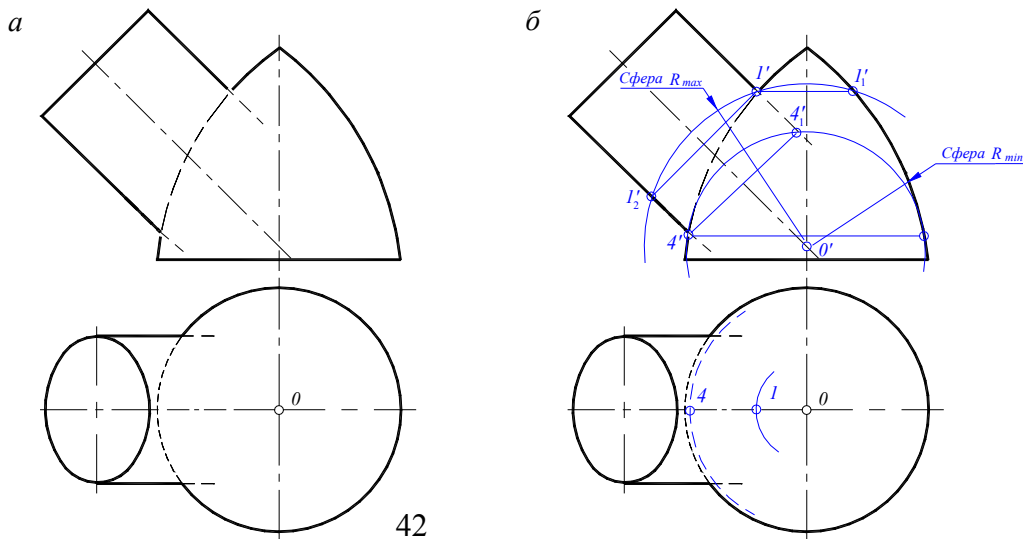


Рис. 36

2. Допоміжні сфери перетинають кожен із заданих поверхонь з утворенням кіл, які проєціюються на одну із площин проєкцій у вигляді відрізків прямих (наприклад,  $1' 1'_1$  і  $1' 1'_2$ ).

3. Точки перетину 1, 2, 3... кожної пари кіл зі сферою, які лежать на шуканій кривій лінії взаємного перетину.

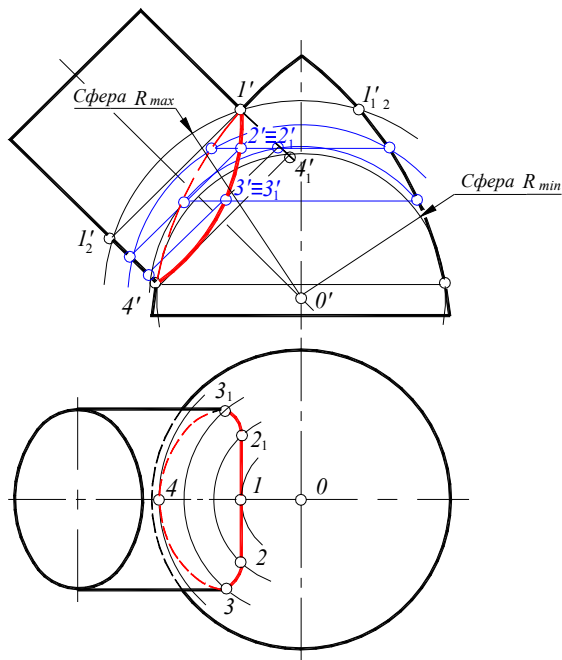


Рис. 37

Додатко Олександр Іванович

ВЗАЄМНИЙ ПЕРЕТИН БАГАТОГРАННИКІВ І КРИВИХ  
ПОВЕРХОНЬ. МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ  
ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ  
для студентів дистанційної форми навчання

Редактор О.Н. Ільченко

Підписано до друку 22.01.2014. Формат 30x42/2.  
Папір офсет. Ризографія. Ум. друк. арк. 5,3  
Обл.-вид. арк. 5,1. Тираж 100 прим. Зам. № 75.

Національний гірничий університет  
49005, м. Дніпропетровськ, просп. К. Маркса, 19.