стемы и контрольного автомата, будет пуст, то проверяемое свойство выполняется на всех вычислениях системы.

**Вывод.** В результате работы были формализованы с помощью языка логики LTL следующие свойства безопасности: защита от повтора, аутентификация субъекта, подтверждение ключа и конфиденциальность. Также на основе одной из полученных формул был построен автомат Бюхи, который является контрольным для анализируемой системы. Дальнейшей задачей автора является формализация свойств протоколов электронной коммерции, разработка модели нарушителя и верификация одного из протоколов электронной торговли с применением модели нарушителя.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Карпов Ю.Г. Model Checking. Верификация параллельных и распределенных систем. – БХВ-Петербург, 2009.
2. Черемушкин А.В. Криптографические протоколы: основные свойства и уязвимости. – М.: Изд-во Academia, 2009.
3. Соколов А. П. Системы программирования. – М.: Изд-во Финансы и Статистика, 2004.
4. Krawczyk U., Sapiecha P. Effective reduction of cryptographic protocols specification of model-checking with Spin / Krawczyk U., Sapiecha P. // Annales UMCS Informatica. – Lublin, 2011. – № 3.– С. 27 – 40.

УДК 044.421: 624.074.435

# АЛГОРИТМ ВИЗНАЧЕННЯ НДС ТОНКОЇ КОНІЧНОЇ ОБОЛОНКИ ПРИ ОДНОБІЧНІЙ В’ЯЗІ МІЖ НЕЮ ТА ПРУЖНОЮ ОСНОВОЮ

**О.В. Запорожець[1], С.М. Горлач[2], В.Б. Запорожець[3]**

[1]кандидат технічних наук, доцент кафедри прикладної математики, Державний вищій навчальний заклад «Придніпровська державна академія будівництва та архітектури», м. Дніпропетровськ, Україна, e-mail: Lena_ne@ukr.net

[2]кандидат технічних наук, доцент кафедри основ і фундаментів, Державний вищій навчальний заклад «Придніпровська державна академія будівництва та архітектури», м. Дніпропетровськ, Україна, e-mail: serg.gorlach@ukr.net

[3]кандидат технічних наук, доцент кафедри будівельної механіки та опору матеріалів, Державний вищій навчальний заклад «Придніпровська державна академія будівництва та архітектури», м. Дніпропетровськ, Україна

**Анотація.** Наведено алгоритм визначення напружено-деформованого стану тонкої конічної оболонки, яка розташована на пружній основі. Між конічною оболонкою та основою може бути як двобічна, так і однобічна в’язі . Ця задача розв’язується за допомогою метода скінченних елементів. У випадку однобічної в’язі переміщення конічної оболонки визначаються за допомогою метода послідовних наближень. За представле-

ним алгоритмом була розроблена програма, на основі якої було виконано багато різноманітних розрахунків.

*Ключові слова: алгоритм, тонка конічна оболонка, метод скінченних елементів, пружна основа.*

## DEFLECTED MODE ALGORITHM OF THIN CONICAL SHELL IN THE CASES OF ONE-WAY AND TWO-WAY CONNECTION BETWEEN THE SHELL AND ELASTIC FOUNDATION

**Olena Zaporozhets[1], Sergey Gorlach[2], Viktor Zaporozhets[3]**

[1]Ph.D., Associate Professor of Applied Mathematics Department, State Higher Educational Institution "Prydniprovs'ka State Academy of Civil Engineering and Architecture", Dnepropetrovsk, Ukraine, e-mail: Lena_ne@ukr.net

[2]Ph.D., Associate Professor of Basements and Foundations Department, State Higher Educational Institution "Prydniprovs'ka State Academy of Civil Engineering and Architecture", Dnepropetrovsk, Ukraine, e-mail: serg.gorlach@ukr.net

[3]Ph.D., Associate Professor of Structural Mechanics and Strength of Materials of Department, State Higher Educational Institution "Prydniprovs'ka State Academy of Civil Engineering and Architecture", Dnepropetrovsk, Ukraine

**Abstract.** The deflected mode algorithm of thin conical shell in the cases of one-way and two-way connection between the shell and elastic foundation is considered. Two-way or one-way connection between shell and the foundation there can be. This problem is solved by finite element method. Shell displacements are defined by serial approximations in case one-way connection. On the algorithm the program has been created. With its help many calculations have been made.

*Keywords: algorithm, thin conical shell, elastic foundation, finite element method.*

**Вступ**. Розрахунком оболонок, розташованих на різних основах присвячено безліч робіт [1-3 та ін.]. У більшості з них поведінка оболонок описується в рамках лінійної теорії, заснованої на гіпотезах Кірхгофа - Лява. У той же час, є ряд конструкцій, елементами яких є гнучкі оболонки, поведінка яких має описуватися геометрично нелінійною теорією згину. Аналітичні рішення, що забезпечують достатню точність визначення всіх необхідних компонентів напружено-деформованого стану таких оболонок, відсутні. Одним з методів, який може бути ефективно використаний при розрахунку згаданих гнучких оболонок, є метод скінченних елементів (МСЕ) [4-6 та ін.].

**Мета роботи.** Метою цієї роботи є розробка алгоритму визначення напружено-деформованого стану тонкої конічної оболонки на пружній основі, який враховує можливість втрати контакту між оболонкою та пружної основою. Для ілюстрування ефективності роботи програми, яка складена за цим алгоритмом, було проведено декілька розрахунків, а також за результатами розрахунків зроблено відповідні висновки.

**Матеріал та результати досліджень.** Розглядається осесиметрична деформація тонкої конічної оболонки, яка розташована на пружній основі. Задача розв'язується методом скінченних елементів в переміщеннях. Поведінка оболонки описується теорією тонких оболонок [7].

Вважається, що матеріал елемента має ізотропні властивості, тому вирази для визначення погонних нормальних зусиль ($N_1$, $N_2$) та згинаючих моментів ($M_1$, $M_2$), відповідно в мерідіанальному та круговому напрямках, мають вигляд

$$N_1 = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_1 + \nu\,\varepsilon_2\right), \qquad N_2 = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_2 + \nu\,\varepsilon_1\right),$$
$$M_1 = D\left(\chi_1 + \nu\,\chi_2\right), \qquad M_2 = D\left(\chi_2 + \nu\,\chi_1\right),. \tag{1}$$

де $\nu$, $E$ – відповідно коефіцієнт Пуассона та модуль пружності матеріалу елемента; $h$ – товщина, а $D$ – циліндрична жорсткість елемента

$$D = \frac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)}. \tag{2}$$

Деформації та переміщення зв'язані між собою такими виразами

$$\varepsilon_1 = \frac{du}{ds} + \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{ds}\right)^2, \;\; \varepsilon_2 = \frac{u}{s} - \frac{w}{s}tg\varphi, \;\; \chi_1 = -\frac{d^2w}{ds^2}, \;\; \chi_2 = -\frac{1}{s}\frac{dw}{ds}. \tag{3}$$

В локальній системі координат меридіанальне ($u$) та поперечне ($w$) переміщення будь-якої точки серединної поверхні елемента описуються виразами

$$u = \left(1-L\right)u_i + L\,u_j, \qquad w = N_i(L)\,w_i + M_i(L)\,\beta_i + N_j(L)\,w_j + M_j(L)\,\beta_j. \tag{4}$$

Переміщення усієї системи визначаються скінченним числом вузлових параметрів $\{\delta\}$. В кожному з двох вузлів скінченного елемента ($i$, $j$) задаються його радіальне ($u_i$, $u_j$) та поперечне ($w_i$, $w_j$) лінійні переміщення, а також кут повороту ( $\beta_i$, $\beta_j$ ).

Задача визначення напружено-деформованого стану тонкої оболонки без основи є нелінійною (див. вираз (1) та (3)), тому для її розв'язання використовується метод Ньютона-Рафсона. Алгоритм використання метода Ньютона для скінченно-елементної моделі наведено в роботі [6].

Вважається, що оболонка знаходиться на пружній малозв'язній основі, поведінка якої задовільно описується в рамках моделі Вінклера [1]. Інтенсивність зовнішніх сил $p$, які діють на скінченний елемент в околі розглядуваної точки, складається з інтенсивності заданого навантаження $q$ та реактивного тиску основи $p*$

$$p = q - p^{*}, \tag{5}$$

при цьому
$$p^{*} = k^{*} w^{*}, \tag{6}$$

де $k^{*}$ – коефіцієнт постілі основи; $w^{*}$ – переміщення поверхні основи, яке дорівнює переміщенню серединної поверхні елемента $w$ в точці, що розглядається, у випадку якщо контакт між скінченним елементом і основою не порушено. В той же час, при однобічній в’язі під частиною оболонки може бути випадок, коли $w \neq w^{*}$, тобто відбувається порушення контакту.

При розгляданні випадку однобічної в’язі між оболонкою та пружною основою, в розв’язанні задачі використовується ще й метод послідовних наближень. Алгоритм, за яким була розроблена програма, та проводились розрахунки, наведено на рис.1.

На етапі введення вхідних даних визначаються розміри оболонки, кількість елементів та їх характеристики, а також характеристики пружної основи й навантажень, що діють на оболонку. Далі для оболонки, яка розташована на пружній основі, визначаються загальні матриці жорсткості та вектор навантажень при двобічній в’язі. За допомогою метода Ньютона-Рафсона визначається вектор переміщень оболонки на пружній основі з двобічною в’яззю. Це розв’язання приймається в якості першого наближення. Потім перевіряється умова переходу до наступного наближення. В якості такої умови виступає присутність від’ємних поперечних переміщень. В наступних наближеннях у вузлах, де спостерігається розтяг основи, основа повинна виключатися з роботи, при цьому відбувається перетворення вхідних даних для нового наближення. Після обчислення переміщень для нових вхідних даних, визначаються положення та розміри місць, де відбулося порушення контакту між оболонкою та основою. Процес повторюється доти, доки у двох послідовних наближеннях розміри та положення зон порушення контакту між основою та оболонкою не будуть рівними між собою. Після остаточного визначення вектора переміщень визначаються зусилля та напруження у оболонці, а також відбувається виведення отриманих результатів. За представленим алгоритмом була розроблена програма, на основі котрої було виконано багато розрахунків. Деякі з них наведено у роботі [8].

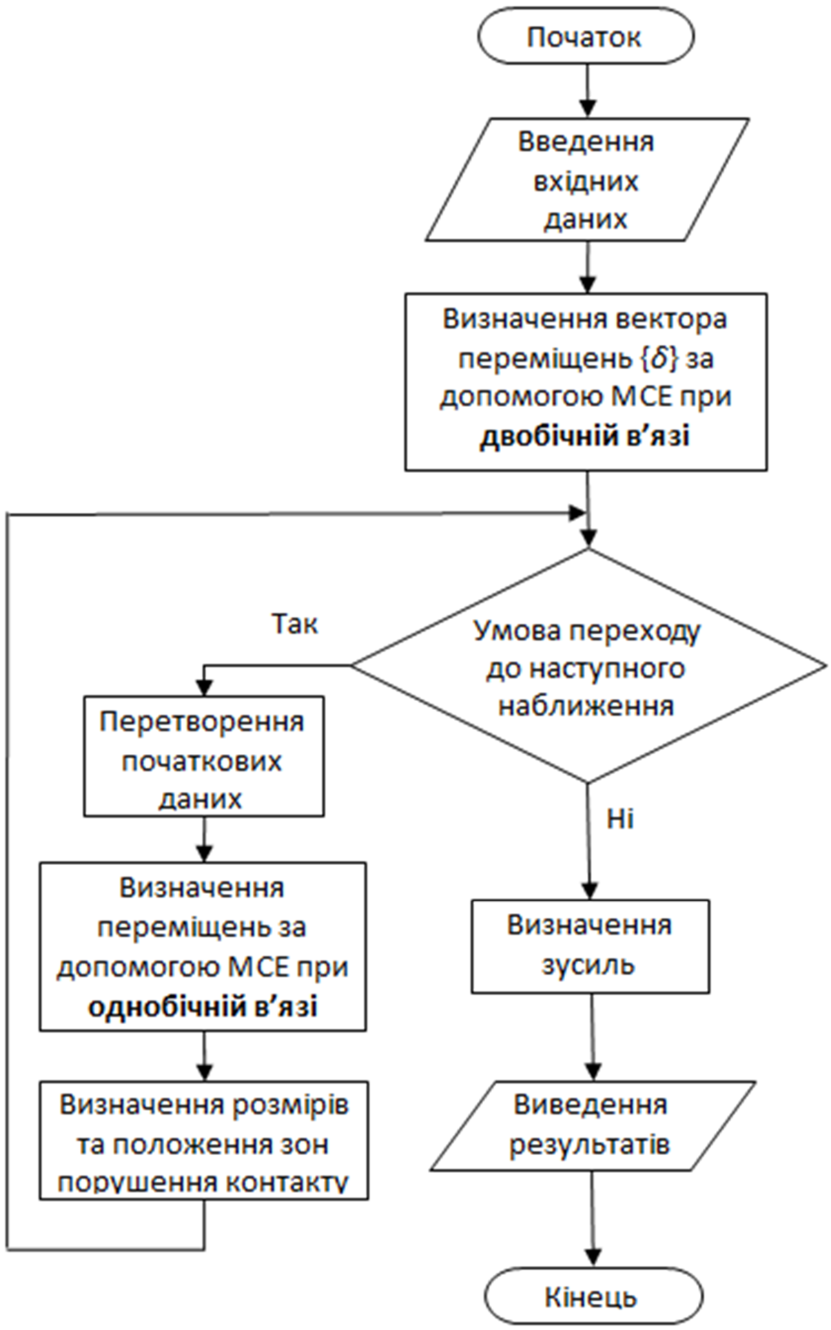


Рисунок 1 – Алгоритм розв'язання задачі

**Висновок.** Наведений алгоритм дозволяє виконувати розрахунки тонких оболонок, розташованих на пружній основі при однобічній та двобічній в'язі між оболонкою та основою. Ця задача розв'язується за допомогою метода скінченних елементів. У випадку однобічної в'язі переміщення конічної оболонки визначаються за допомогою метода послідовних наближень.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. - М.: Физматгиз, 1960. - 491 с.
2. Климанов В.И., Литвиненко А.Г., Каваева В.П. Конические фундаменты – оболочки. – М.: Стройиздат, 1988. – 127 с.
3. Flügge W. Powłoki oblczenia statyczne. – Warszawa: Arkady, 1972. – 510 s.
4. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 544 с.
5. Немчинов Ю.И. Метод пространственных конечных элементов с применением к расчету зданий и сооружений. – К.: НДІБК, 1995. – 368с.
6. Bakker M.C.M., Pekoz T.The Finite Element Method for Thin-Walled Members – Basic Principles // Third International Conference on Thin-Walled Structures. – Elsevier. – 2001. – P.417-425.
7. Вольмир А.С. Гибкие пластины и оболочки. - М.: Гостехиздат, 1956. – 419 с.
8. Запорожец Е.В. Расчет методом конечных элементов осесимметричного изгиба гибких конических оболочек, расположенных на упругом основании // Вісник Придніпровської державної академії будівництва та архітектури. – Дніпропетровськ: ПДАБтаА, 2004. -№ 3. – С. 24 – 29.

UDC 622.625.28

# STUDY OF HETZIAN STRESS CONTACT THEORY AND FEA STRESS-STRAIN STATE CONVERGENCE

**K.A. Ziborov[1], D.A. Kohonova[2], V.V. Protsiv[3]**
[1]associated professor, M.SC., professorб Head of the Department of Machinery Design Fundamentals, State Higher Educational Institution “National Mining University”, Dnepropetrovsk, Ukraine, e-mail: ziborov@nmu.org.ua.
[2]junior research assistant, Department of Mining Engineering, State Higher Educational Institution “National Mining University”, Dnepropetrovsk, Ukraine, e-mail: kohanova.d.a.@gmail.com
[3]Ph.D., Professor of the Department of Machinery Design Fundamentals, State Higher Educational Institution “National Mining University”, Dnepropetrovsk, Ukraine

**Abstract.** Theoretical study of a convergence of a deformable body stress state, which is obtained by different approaches, provided in the paper. The following methods are used: Hertzian stress contact theory and finite element analysis. As a result of the research, high convergence of both calculation approaches is reached.

*Key words: convergence, finite element analysis, Hertzian stress contact theory, deformable body.*