



УДК 531.8

## **ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КРИВОШИПНО-ШАТУННОГО МЕХАНИЗМА ДВИГАТЕЛЯ ВНУТРЕННЕГО СГОРАНИЯ**

**А.А. Никитина**

кандидат технических наук, преподаватель электротехнических дисциплин, Индустриальный техникум Государственного высшего учебного заведения «Криворожский национальный университет», г. Кривой Рог, Украина, e-mail: [ann.nikitina@mail.ru](mailto:ann.nikitina@mail.ru)

**Аннотация.** Разработана динамическая модель кривошипно-шатунного механизма двигателя внутреннего сгорания как системы с тремя степенями свободы. Получены уравнения, которые учитывают движения поршня вдоль оси цилиндра при повороте кривошипа, движения поршня в плоскости перпендикулярной плоскости цилиндра и поворот поршня вокруг оси поршневого пальца.

*Ключевые слова:* кривошипно-шатунный механизм, зазор, уравнения Лагранжа второго рода, силы давления газов.

## **DYNAMIC MODEL OF A CRANK MECHANISM OF AN INTERNAL COMBUSTION ENGINE**

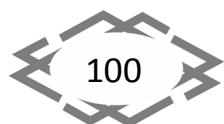
**Anna Nikitina**

Ph.D., lecturer of electrical engineering disciplines, Industrial college of State Higher Educational Institution "National University of Krivoy Rog", Krivoy Rog, Ukraine, e-mail: [ann.nikitina@mail.ru](mailto:ann.nikitina@mail.ru)

**Abstract.** Dynamic model of the crank mechanism of the internal combustion engine as a system with three degrees of freedom is developed. The equations that take into account the movement of the piston along the axis of the cylinder during rotation of the crank, piston motion in the plane perpendicular to the plane of the cylinder and rotation of the piston about the axis of the piston pin are pursued.

*Keywords:* crank mechanism, the gap, La Grange's equations of the second kind, the gas pressure forces.

**Введение.** Для преобразования возвратно-поступательного движения поршня во вращательное движение коленчатого вала в двигателях внутреннего сгорания (ДВС) применяются самые разнообразные механизмы: кулачковые, рычажные, зубчатые, винтовые в гидравлическими, пневматическими, электрическими устройствами и многие другие, однако самым распространенным по ряду причин является кривошипно-шатунный механизм (КШМ) [1].





В литературе широко представлены различные варианты динамических моделей КШМ двигателей, так например, модель КШМ двигателя как системы с одной степенью свободы рассмотрена в работах [1, 2–5]. В работах [6–8] дополнительно учитывается поворот поршня вокруг оси поршневого пальца, однако движение поршня в плоскости перпендикулярной оси цилиндра не рассмотрено, кроме того, для движения поршня с учетом его поворота не получены в конечном виде уравнения движения, а в качестве причин вызывающих поворот поршня рассмотрены только гидродинамические силы в смазочном слое между поршнем и цилиндром. В работах [7, 8] показано, что в общем виде КШМ ДВС представляет собой систему с шестью степенями свободы, однако в виду сложности получения уравнений движения такой системы, в указанных работах КШМ представляется системой с двумя или с одной степенью свободы.

**Цель работы.** В силу вышесказанного целью данной работы является разработка динамической модели КШМ двигателя как системы с тремя степенями свободы, в которой дополнительно учитываются движения поршня вдоль оси цилиндра при повороте кривошипа, движения поршня в плоскости перпендикулярной плоскости цилиндра и поворот поршня вокруг оси поршневого пальца.

**Материал и результаты исследований.** Кинематический анализ КШМ [1, 2] проведем на основе схем изображенных на рис. 1 и рис. 2. В качестве основного параметра определяющего положения основных точек КШМ примем угол  $\varphi = f(t)$  поворота кривошипа. При этом угловая скорость вращения коленчатого вала определяется первой производной от угла поворота по времени  $\omega_{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$  [1, 2].

На рис. 1 а) представлена обобщенная механическая схема кривошипно-шатунного механизма ДВС на такте сжатия, где: 1 – гильза цилиндра двигателя внутреннего сгорания; 2 – поршень ДВС; 3 – шатун длиной  $CO = l$ ; 4 – коленчатый вал или кривошип длиной  $CO_1 = r$ ;  $\Delta$  – зазор между поршнем и гильзой цилиндра, образовавшийся в результате износа гильзы в процессе эксплуатации; точки А и В – определяют соответственно положение поршня, когда он удален от оси коленчатого вала на максимальное расстояние, или верхняя мертвая точка и положение поршня, когда он удален от оси коленчатого вала на минимальное расстояние или нижняя мертвая точка.  $S = AB = 2r$  – ход поршня или расстояние между верхней и нижней мертвыми точками; точки О, О<sub>1</sub>, С – соответствуют осям пальца поршня, коренной шейки и оси шатунной шейки соответственно; точки С\* и С<sub>0</sub> соответствуют положениям оси шатунной шейки, когда поршень находится в верхней и нижней мертвых точках соответственно;  $\omega_k$  – угловая



скорость вращения коленчатого вала;  $P_r$  – сила давления газов на поршень;  $R_s$  – суммарная сила, действующая вдоль оси цилиндра, которая раскладывается на две составляющие  $N$  – боковую силу прижимающую поршень к стенке цилиндра и силу  $S$ , направленную по оси шатуна, которая растягивает или сжимает шатун.

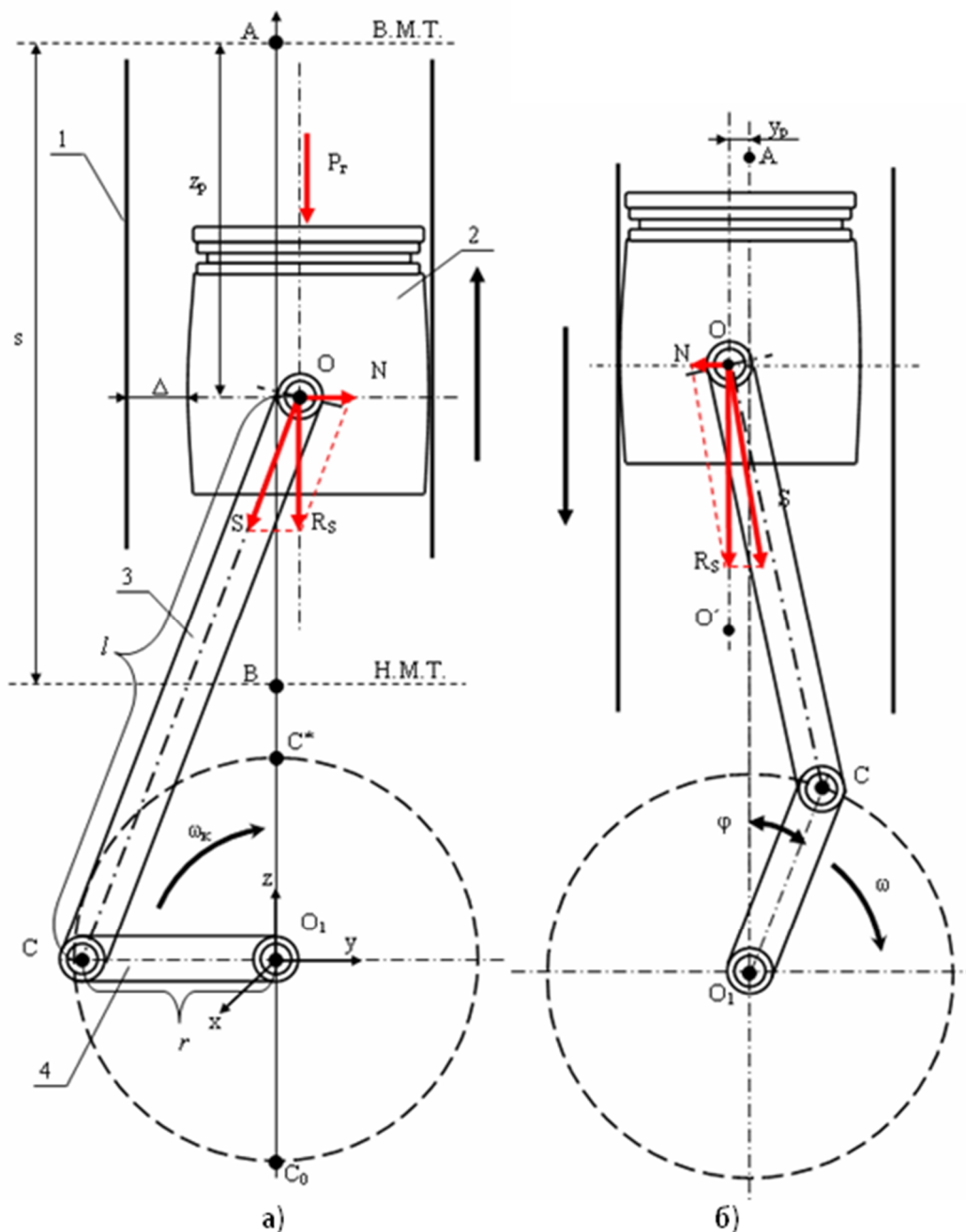


Рисунок 1 – Обобщенная механическая схема кривошипно-шатунного механизма ДВС для: а) такта сжатия, б) рабочего хода двигателя

Рабочий ход двигателя проиллюстрирован рис. 1 б), при этом показано, что расширяющиеся газы во время рабочего хода с большой силой да-



вят на поршень, вызывая появление боковых сил, которые обуславливают прижатие поршня к левой стенке цилиндра.

На рис. 2. представлена схема а) для определения перемещения  $z_p$  поршня в направлении оси вертикальной  $z$  и б) для определения линейной скорости шатуна. При работе точка  $O$  соответствующая поршневому пальцу перемещается одновременно вдоль оси  $O_1z$  за счет поворота кривошипа на угол  $\phi$  и вдоль оси  $O_1y$  за счет действия на поршень боковых сил. При этом перемещения поршня вдоль этих осей будут соответственно  $z_p$  и  $y_p$ . Величину дезаксажа двигателя обозначим  $e$ , мгновенный центр скоростей обозначим  $P$ . Остальные обозначения соответствуют принятым ранее для схемы на рис. 1.

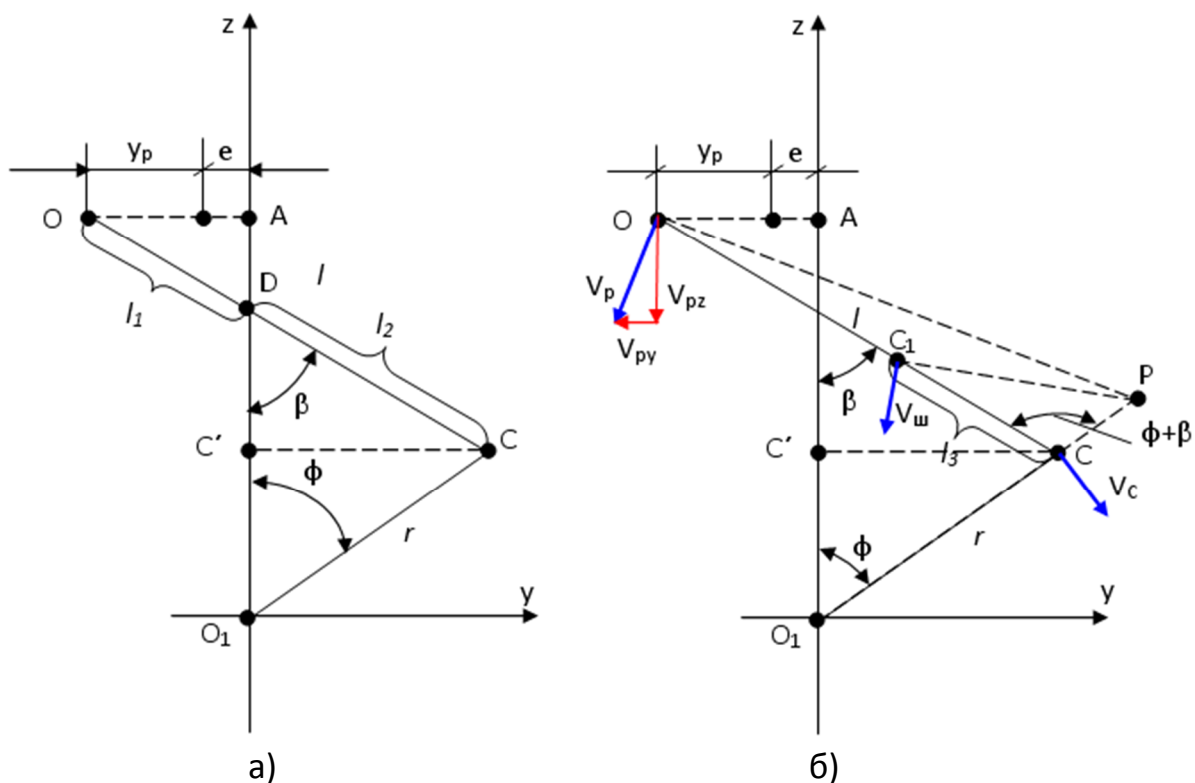


Рисунок 2 – Схема для определения: а) перемещения и линейной скорости поршня; б) линейной скорости шатуна

Введем следующее обозначение

$$F(t, \varphi, y_p) = \lambda \cdot \sin \varphi + \frac{(y_p \pm e)}{l}, \quad (1)$$

где  $\lambda = \frac{r}{l}$  - безразмерный параметр КШМ (отношение радиуса кривошипа к длине шатуна).



Тогда с учетом схемы 2 а) и соответствующих преобразований определим скорость поршня в системе координат  $O_1x_1y_1z_1$ , где полюс точка  $O_1$  соответствует оси коренной шейки, будет равна

$$V_p = \sqrt{V_{\delta z}^2 + V_{\delta y}^2} = \sqrt{\left(-\omega \cdot (F \cdot l - y_p \mp e) - l \cdot F \cdot \frac{dF}{dt}\right)^2 + \dot{\delta}^2}. \quad (2)$$

Основные кинематические параметры шатуна, совершающего плоско-параллельное движение найдем при помощи схемы рис. 2 б).

$$\omega_{\phi} = \frac{d\beta}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1-(F)^2}} \cdot \frac{dF}{dt} = \frac{2}{2-F^2} \cdot \frac{dF}{dt}, \quad (3)$$

$$\varepsilon_{\phi} = \frac{d\omega_{\phi}}{dt} = \frac{d^2F}{dt^2} \cdot \left(\frac{2}{2-F^2}\right) - \frac{dF}{dt} \cdot \left(\frac{2}{(2-F^2)^2}\right), \quad (4)$$

$$V_{\phi} = \omega_{\phi} \cdot \sqrt{l_3^2 + \left(\frac{V_C}{\omega_{\phi}}\right)^2 - 2 \cdot \frac{l_3 \cdot V_C}{\omega_{\phi}} \cdot \left[\cos\varphi \cdot \left(1 - \frac{F^2}{2}\right) - \sin\varphi \cdot F\right]}, \quad (5)$$

где  $\omega_{\phi}$ ,  $\varepsilon_{\phi}$  и  $V_{\phi}$  - соответственно угловая скорость, угловое ускорение и линейная скорость шатуна.

При разработке модели движения КШМ необходимо дополнительно учитывать поворот поршня вокруг оси поршневого пальца [6–9]. Основными причинами поворота поршня являются воздействие сил давления газов на поршень и наличие зазоров между поршнем и цилиндром, образовавшихся в результате изнашивания цилиндра в процессе эксплуатации. При этом угол  $\gamma$  поворота поршня напрямую зависит от величины зазоров между поршнем и стенкой цилиндра и достигает больших значений при больших зазорах [9].

Во время работы поршень двигателя массой  $m_p$  совершает одновременно поступательное движение со скоростью  $V_p$  и вращательное с угловой частотой  $\omega_p$ ; шатун массой  $m_{\phi}$  также совершает сложное движение: поступательное с линейной скоростью  $V_{\phi}$  и вращательное с угловой  $\omega_{\phi}$ ; кривошип массой  $m_{кр}$  вращается вокруг оси коренной шейки с угловой скоростью  $\omega_k$ .

При этом, как видно из рис. 3, на поршень действуют усилия способствующие его повороту на угол  $\gamma$  вокруг оси поршневого пальца это: результирующие сил давления газов на поршень  $P_r$ , создающие крутящий момент  $M_{P_r}$ ; вес поршня  $G$ , приложенный к центру масс поршня в точке  $S_2$



и создающий крутящий момент  $M_G$  за счет несовпадения центра масс поршня с точкой  $O$  расположения поршневого пальца; силы  $P_{M1}$  и  $P_{M2}$ , возникающие в результате реакции смазочного слоя между поршнем и цилиндром; момент сопротивления в пальцевом шарнире  $M_{сн}$ . В данной работе гидродинамические реакции  $P_{M1}$  и  $P_{M2}$ , момент сопротивления  $M_{сн}$ , а также сила трения  $F_{тр}$ , возникающая в сопряжении поршень-цилиндр не учитываются в виду их незначительности.

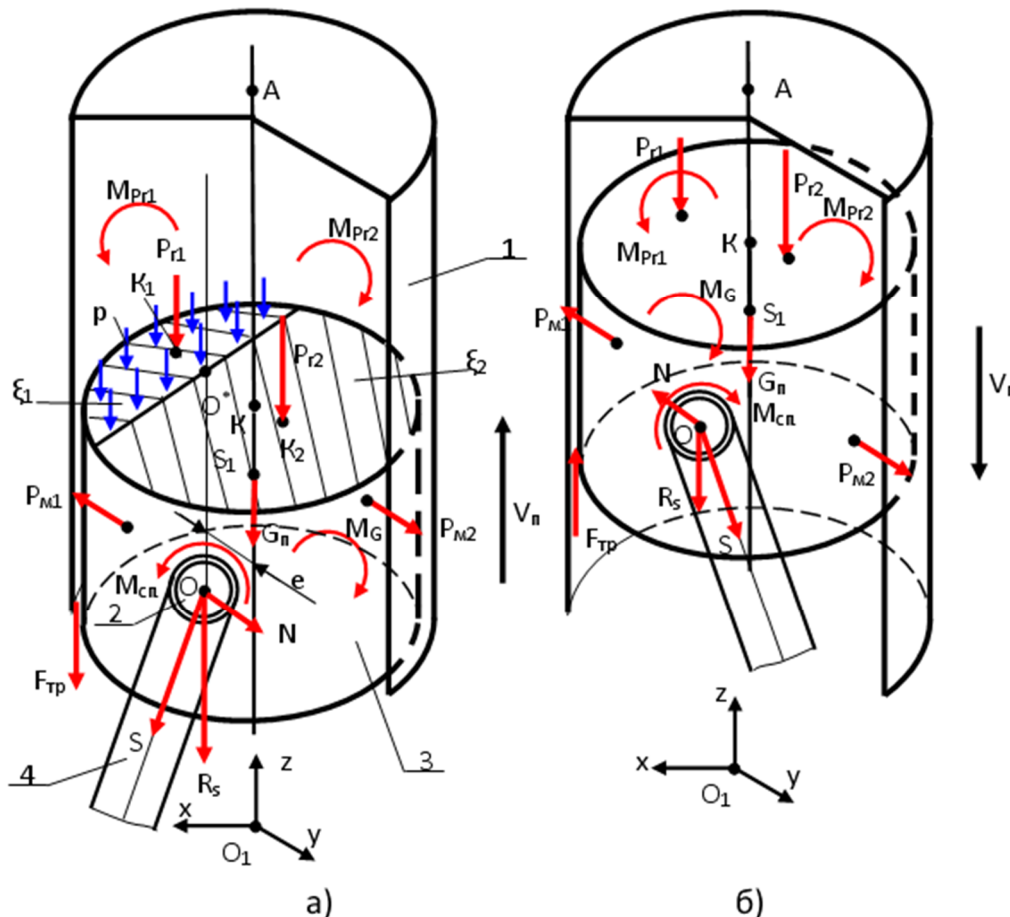


Рисунок 3 – Основные усилия действующие на поршень

Крутящий момент  $M_G$  можно вычислить из соотношения

$$M_G = G \cdot e. \quad (6)$$

Результирующий момент, приводящий к повороту поршня имеет вид

$$M_p = M_{P_2} + M_G. \quad (7)$$



Для расчета момента  $M_{P_2}$  определим воздействие сил давления газов на поршень. Сила  $P_r$ , возникающая в результате воздействия давления газов на поршень, пропорциональна площади его поперечной поверхности площадью и определяется соотношением

$$R_2 = (p - p_0) \cdot \xi, \quad (8)$$

где  $p$  – давление газов в цилиндре (над поршнем), МПа;  $p_0$  – давление в картере двигателя под поршнем, МПа;  $\xi$  – площадь поперечной поверхности поршня,  $m^2$ .

Сила давления газов является функцией угла поворота кривошипа, то есть  $P_r = f(\varphi)$ , и определяется из индикаторной диаграммы двигателя.

В общем виде зависимость  $P_2(\varphi)$  удобно представлять полиномом 6-й степени

$$\delta_a(\varphi) = a_1 \cdot \varphi^6 + a_2 \cdot \varphi^5 + a_3 \cdot \varphi^4 + a_4 \cdot \varphi^3 + a_5 \cdot \varphi^2 + a_6 \cdot \varphi + a_7, \quad (9)$$

где  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$  – коэффициенты полинома, которые определяются по данным реальной индикаторной диаграммы.

По оси поршневого пальца поршень ДВС можно условно разбить на две части, соответственно которым площадь поперечной поверхности поршня  $\xi$  также разбивается на две части левую –  $\xi_1$  и правую –  $\xi_2$ , и, так как давление газов равномерно распределяется по площади  $\xi$  силу  $P_r$  можно представить двумя силами  $P_{r1}$  и  $P_{r2}$ , величины которых согласно выражению (9) с учетом формул вычисления площади сегмента круга определяются соотношениями

$$P_{r1} = (p - p_0) \cdot \left[ R_n^2 \cdot \arccos \frac{e}{R_n} - e \cdot \sqrt{R_n^2 - e^2} \right], \quad (10)$$

$$P_{r2} = (p - p_0) \cdot \left[ R_n^2 \cdot \arccos \left( -\frac{e}{R_n} \right) + e \cdot \sqrt{R_n^2 - e^2} \right]. \quad (11)$$

где  $e$  – дезаксаж поршня;  $R_i = \frac{b_i}{2}$  – радиус поршня.

Крутящие моменты от действия этих сил определяются как

$$M_{P_{r1}} = (p - p_0) \cdot \left[ R_n^2 \cdot \arccos \frac{e}{R_n} - e \cdot \sqrt{R_n^2 - e^2} \right] \cdot L_1, \quad (12)$$



$$M_{P_{r2}} = (p - p_0) \cdot \left[ R_n^2 \cdot \arccos\left(-\frac{e}{R_n}\right) + e \cdot \sqrt{R_n^2 - e^2} \right] \cdot L_2, \quad (13)$$

где  $L_1, L_2$  – плечи сил  $P_{r1}$  и  $P_{r2}$  соответственно.

Уравнения движения КШМ получим путем решения уравнений Лагранжа второго рода.

При составлении уравнений Лагранжа второго рода для нашей системы с тремя степенями свободы в качестве обобщенных координат примем координаты  $q_1 = \phi, q_2 = \gamma, q_3 = \gamma_p$ .

В общем виде уравнение Лагранжа второго рода имеет вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad (14)$$

где  $T(q_i, \dot{q}_i, t)$  – кинетическая энергия системы;  $q_i$  –  $i$ -я обобщенная координата;  $\dot{q}_i$  –  $i$ -я обобщенная скорость;  $Q_i$  –  $i$ -я обобщенная сила соответствующая  $i$ -й обобщенной координате;

Для рассмотренного в работе КШМ соответственно индекс  $i = 1$  соответствует координате  $\phi$ , индекс  $i = 2$  – координате  $\gamma$ , а индекс  $i = 3$  – координате  $\gamma_p$ .

Полная кинетическая энергия системы

$$T_{\text{кшм}} = \sum_{i=1}^n T_i = \frac{m_n \cdot V_p^2}{2} + \frac{m_{\text{ш}} \cdot V_{\text{ш}}^2}{2} + \frac{m_{\text{кр}} \cdot V_{\text{кр}}^2}{2} + \frac{[I_{S_1} + m_n \cdot (S_1O)^2] \cdot \omega_n^2}{2} + \frac{I_{\text{ш}} \cdot \omega_{\text{ш}}^2}{2} + \frac{I_{\text{кр}} \cdot \omega_{\text{к}}^2}{2}, \quad (15)$$

где  $m_n$  – масса поршня;  $V_p$  – линейная скорость поршня;  $\omega_n$  – угловая скорость вращения поршня;  $\omega_n = \dot{\gamma}$ ;  $I_{S_1}$  – центральный момент инерции поршня;  $S_1O$  – расстояние между точкой  $O$  соответствующей пальцу поршня и точкой  $S_1$  – центром масс поршня;  $m_{\text{ш}}$  – масса шатуна;  $V_{\text{ш}}$  – линейная скорость центра масс шатуна;  $I_{\text{ш}}$  – момент инерции шатуна;  $m_{\text{кр}}$  – масса кривошипа;  $V_{\text{кр}}$  – линейная скорость центра масс кривошипа;  $\omega_{\text{к}} = \dot{\phi}$ .

Обобщенные силы для координат  $q_1 = \phi, q_2 = \gamma, q_3 = \gamma_p$  рассчитываются по выражениям





$$\left\{ \begin{aligned} Q_1 &= m_{kp}g \cdot r \cdot \sin \varphi + m_u g \cdot r \cdot \sin \varphi - \frac{1}{2}(m_u g \cdot l_3 + m_n g \cdot l \\ &+ m_u g \cdot l_3 + m_n g \cdot l) \cdot \left[ \lambda^2 \cdot \sin(2\varphi) + \frac{y_p \pm e}{l} \cdot \lambda \cdot \cos \varphi \right] + m_n g \cdot r \cdot \sin \varphi + \\ &+ P_{e1} \cdot r \cdot \sin \varphi + P_{e2} \cdot r \cdot \sin \varphi + M_{kp}; \\ Q_2 &= -m_n g \cdot r \cdot l^* \cdot \cos(\alpha - \gamma) - P_{e1} \cdot r \cdot (h_n \cdot \sin \gamma + L_1 \cdot \cos \gamma) - \\ &- P_{e2} \cdot r \cdot (h_n \cdot \sin \gamma - L_2 \cdot \cos \gamma); \\ Q_3 &= -\frac{1}{2l^2}(m_u g \cdot l_3 + m_n g \cdot l + P_{e1} \cdot l + P_{e2} \cdot l) \cdot (r \cdot \sin \varphi + 2(y_p \pm e)). \end{aligned} \right. \quad (16)$$

Окончательно уравнение движения для рассматриваемой системы, например в направлении координаты  $\gamma$ , примет вид

$$\left[ I_{s1} + m_n \cdot (S_1 O)^2 \right] \cdot \ddot{\gamma}_n = -m_n g \cdot r \cdot l^* \cdot \cos(\alpha - \gamma) - P_{e1} \cdot r \cdot (h_n \cdot \sin \gamma + L_1 \cdot \cos \gamma) - P_{e2} \cdot r \cdot (h_n \cdot \sin \gamma - L_2 \cdot \cos \gamma). \quad (17)$$

При этом начальные условия:  $\varphi(0)=0$ ,  $\dot{\varphi}(0)=\omega = const$ ,  $\gamma(0)=0$ ,  $\dot{\gamma}(0)=0$ ,  $\ddot{\gamma}(0)=0$ ,  $y_p(0)=0$ ,  $\dot{y}_p(0)=0$ ,  $\ddot{y}_p(0)=0$ .

**Вывод.** Таким образом, в данной работе разработана динамическая модель КШМ двигателя внутреннего сгорания, представленного как система с тремя степенями свободы. Получена система уравнений движения, в которой учитывается вертикальное перемещение поршня при повороте кривошипа на угол  $\varphi$ , горизонтальное перемещение поршня за счет зазора между поршнем и гильзой цилиндра и поворот поршня вокруг оси поршневого пальца на угол  $\gamma$ . Сила давления газов на поверхность поршня была представлена двумя составляющими, на основе чего была разработана новая методика определения вращающих моментов, вызывающих поворот поршня вокруг оси поршневого пальца на угол  $\gamma$ . В динамической модели КШМ дополнительно учтена возможность наличия дезаксажа; масса шатуна, которая совершает сложное движение в отличие от рассматриваемых ранее в литературе упрощенных моделей; а также учтено то, что ось поршневого пальца может не проходить через центр масс поршня.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гоц А.Н. Кинематика и динамика кривошипно-шатунного механизма поршневых двигателей : учеб. Пособие / А.Н. Гоц; Владим. гос. ун-т. – Владимир : Редакционно-издательский комплекс ВлГУ, 2005. – 124 с.



2. Крамской А.В. Математическая модель пневматического двигателя с кривошипно-шатунным механизмом / А.В. Крамской, И.Н. Кудрявцев // Автомобильный транспорт: Сб. научн. статей / ХНАДУ.– Харьков, 2008. - № 23. - С. 70-75.
3. Туренко А.Н., Богомолов В.А., Кудрявцев И.Н. и др. Математическая модель пневматического цилиндра с двусторонним приводом // Автомобильный транспорт: Сб. науч. трудов. – Харьков. – 2002. – Вып. 10. – С. 10 – 16.
4. Гуляев, В. И. Моделирование динамики кривошипно-шатунного механизма с упругими звеньями / Научно-технический раздел / В. И. Гуляев, А. Н. Иконников // Проблемы прочности : Междунар. науч.-техн. журнал . – 2002. – № 5 . – с. 105-114.
5. Чайнов, Н. Д. Программный комплекс для расчета вибрации и структурного шума корпусных деталей автомобильного дизеля / Н. Д. Чайнов, Л. Л. Мяков, В. С. Русинковский // Двигатели внутреннего сгорания. - 2004. - № 2. - С. 105-110 .
6. Доценко В. Н. Математическая модель движения поршня ДВС с учетом гидродинамических сил и моментов, возникающих в смазочном слое между поршнем и цилиндром / В. Н. Доценко, И. Н. Москаленко // Двигатели внутреннего сгорания. - 2009. - № 2. - С. 57-59.
7. Рождественский, Ю.В. Компьютерное моделирование динамики трибосопряжения «поршень–цилиндр»: учебное пособие / Ю.В. Рождественский – Челябинск: Издательство ЮУрГУ, 2009. – 50 с.
8. Маслов, А.П. Повышение технического уровня дизелей оптимизацией геометрических параметров поршней: дис. ... канд. техн. наук / А.П. Маслов. – Челябинск, 1999. – 158 с.
9. Сергеев В.И., Юдин К.М. Исследование динамики плоских механизмов с зазорами.- М.: Наука, 1974. -111с.

УДК 621.791.12: 621.7.044.2

## **ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ**

**Ю.В. Савченко<sup>1</sup>, И.В. Вернер<sup>2</sup>, Е.А. Ольховик<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>старший преподаватель кафедры технологии горного машиностроения, Государственное высшее учебное заведение «Национальный горный университет», Днепропетровск, Украина, E-mail: [savcheny@ua.fm](mailto:savcheny@ua.fm)

<sup>2</sup>заведующий лабораторией информационных технологий проектирования кафедры основ конструирования механизмов и машин, Государственное высшее учебное заведение «Национальный горный университет», Днепропетровск, Украина, E-mail: [ill3@mail.ru](mailto:ill3@mail.ru)

<sup>3</sup>студент группы ГЛгр-13-2, Государственное высшее учебное заведение «Национальный горный университет», Днепропетровск, Украина

**Аннотация.** Разработана математическая модель, которая позволяет оптимизировать с точки зрения дефектообразования параметры нагружения обрабатываемых материалов, разрушение рассмотрено как метод создания дефектов на субмикроскопическом уровне в гетерогенных средах.