

ЛІТЕРАТУРА

1. Rusbridge M.G., Motion of the spring pendulum, *American Journal of Physics*, vol. 48, no. 2, pp. 146–151, 1980.
2. Breitenberger E. Mueller R.D. The elastic pendulum: a nonlinear paradigm, *Journal of Mathematical Physics*, vol. 22, no. 6, pp. 1196–1210, 1981.
3. Lai H.M. On the recurrence phenomenon of a resonant spring pendulum, *American Journal of Physics*, vol. 52, no. 3, pp. 219–223, 1984.
4. Georgiou, I. T. 1999. On the global geometric structure of the dynamics of the elastic pendulum, *Nonlinear Dynam.* 18, 51-68.
5. Girgin Z., Demir E. Investigation of Elastic Pendulum Oscillations by Simulation Technique, *Journal of Engineering Sciences* 2009 15 (1) 81-86
6. Broucke R, Baha P.A. Periodic solutions of a spring-pendulum system. *Celestial mechanics* September 1973, Volume 8, [Issue 2](#), pp 261-267
7. Gavin Henri P. Generalized Coordinates, Lagrange's Equations, and Constraints. CEE 541. Structural Dynamics – Duke University – 2014. 23 p.
8. Chen Y.F. Scientific computing and visualization. Spring pendulum system, top.4. Электронний ресурс. Режим доступу <http://ocw.nctu.edu.tw/upload/classbfs1209054703145981.pdf>
9. Электронний ресурс. Режим доступу: <http://ocw.mit.edu/courses/mechanical-engineering/2-003j-dynamics-and-control-i-spring-2007/lecture-notes/lec17.pdf>
10. Семків О.М. Метод визначання особливих траєкторій коливань вантажу 2d-пружинного маятника. - Харків: ХНАДУ, Вісник ХНАДУ, № 71, 2015. – С. 36-44.
11. Семкив О.М. Особенности геометрической формы колебаний груза 2d-пружинного маятника. - Международная конференция по научному развитию Евразии.–Австрия, г. Вена-VII 2015. – С. 217-214.

УДК 004.942

МЕТОД РАСЧЕТА РАСХОДА РУЧЕЙНОГО ПОТОКА СМЕСИ ОВАЛОИДОВ

А.А. Аннов

специалист по контролю параметров зернисто/кусковых потоков, Штутгарт, Германия, e-mail: annov@gmx.de

Аннотация. С помощью компьютерного моделирования произведена имитация процесса зондирования точечным оптическим лучом ручейного потока смеси эллипсоидов. Предложен метод расчета объемного расхода ручейного потока смеси объектов, имеющих форму овалов.

Ключевые слова: смесь эллипсоидов вращения, среднестатистическая хорда смеси, объем порции потока.

METHOD OF CALCULATING THE VOLUME FLOW A SINGLE-ROW THE STREAM OF OVALOIDS

Aleksander Annov

control specialist parameters of grainy / lumpy streams, Stuttgart, Germany, e-mail: annov@gmx.de

Abstract. With the help of computer simulation, performed imitation sounding of the punctiform optical beam of single-row the flow the ellipsoids. For the portion of single-row the flow of ovaloids obtained average statistical ellipsoid of revolution. Offer the method of calculating the volume flow of the single-row the stream of the mixture ovaloids.

Keywords: *a mixture of ellipsoids of rotation, average statistical chord mixtures, the volume of portion of flow.*

Введение. Данная работа является продолжением исследования обкатанных зернисто/кусковых потоков путем имитационного моделирования в среде *Excel* статистического массива секущих хорд, образующегося в результате имитации пересечения точечным оптическим лучом сенсора (*SPT*) точечной просветности [1, 2, 3] теневых проекций неупорядоченного монослойного потока оваловидов.

Учитывая, что объекты обкатанных потоков в большинстве случаев имеют форму оваловидов, для моделирования, в качестве эквивалентной фигуры правильной геометрической формы, выбраны две разновидности эллипсоида: вытянутый эллипсоид вращения и вытянутый трехосный эллипсоид. Их размер определяется главным большим диаметром эллипсоида (d_a), а форма главными малыми диаметрами эллипсоида ($d_b; d_c$). Теневой проекцией вытянутого эллипсоида, расположенного на горизонтальной плоскости в статическом состоянии, является эллипс. Форма эллипса характеризуется [4⁵⁶] его коэффициентом сжатия ($k_i = d_b/d_a$). Форма трехосного эллипсоида характеризуется двумя коэффициентами осевого сжатия ($k_b = d_b/d_a; k_c = d_c/d_a$), а эллипсоида вращения коэффициентом кругового сжатия ($k_o = d_b/d_a = d_c/d_a$). При необходимости перехода от одной модели эллипсоида к другой, их коэффициенты сжатия связаны зависимостью $k_o = 0,5(k_b + k_c)$.

Цель работы. По результатам компьютерного моделирования статистического массива секущих хорд на теневых проекциях ручейного потока смеси эллипсоидов, имитирующий результат зондирования порции ручейного потока сенсором точечной просветности (*SPT*), проверить возможность определения параметров объектов потока и объема порции потока.

Моделирование конечного статистического массива секущих хорд. Для удобства моделирования был выбран вытянутый эллипсоид вращения,

свободно расположенный на горизонтальной плоскости, проекцией которого на плоскость является эллипс. В этом случае, коэффициенты сжатия эллипсоида ($k_{oi\rightarrow}$) и его проекции равны ($k_{oi\rightarrow} = k_i$), а символ (\rightarrow) уточняет условие того, что ось вращения эллипсоида параллельна плоскости его проекции (идеализированный случай потока). Массивы секущих хорд, необходимые для исследования, были получены путем ранее предложенного [3] метода моделирования квази-бесконечного пошагово – вращающегося переменного множества параллельных хорд эллипса.

Смеси эллипсоидов вращения. Для исследования были сформированы две смеси, каждая из которых состоит из 21 эллипсоида. На теневых проекциях эллипсоидов смоделированы, по одним правилам, конечные подмножества секущих хорд эллипса, в совокупности образующие множество секущих хорд на теневых проекциях смеси эллипсоидов. Размеры эллипсоидов, характеризуемые большим главным диаметром ($d_a = d_m$), в обеих смесях располагались на интервале $d_a = [-20 + 10] \text{ mm}$, с шагом $\Delta d_a = 0,5 \text{ mm}$. В смеси 1, форма эллипсоидов изменялась с равномерным шагом ($\Delta k_{o\rightarrow} = 0,02$) на интервале $k_{oi\rightarrow} = [0,3; 0,7]$. При этом наибольший по размеру ($d_a = 20 \text{ mm}$) эллипсоид имеет наименьший коэффициент кругового сжатия ($k_{oi\rightarrow} = 0,3$). Смесь 2, является противоположностью смеси 1. В ней наибольший по размеру эллипсоид имеет наибольший коэффициент кругового сжатия ($k_{oi\rightarrow} = 0,7$), изменяющийся на интервале $k_{oi\rightarrow} = [0,7; 0,3]$ с шагом ($\Delta k_{o\rightarrow} = 0,02$). Каждая смесь состоит из следующих двух комбинаций, равновеликих по совокупному количеству хорд:

- с условным *закрупнением*, когда в смеси равномерно по нарастающей от середины увеличено количество эллипсоидов больших размеров, ее символическое обозначение (++);

- с условным *замельчением*, когда в смеси равномерно по нарастающей от середины увеличено количество эллипсоидов меньших размеров, ее символическое обозначение (- -).

Виртуальный среднестатистический эллипсоид порции ручейного потока, состоящей их смеси эллипсоидов. Совокупное множество секущих хорд порции ручейного (поштучного) потока, состоящей их смеси эллипсоидов, образует виртуальный консолидарный оваллоид смеси, с параметрами ($d_{m\Sigma}; H_\Sigma; N_\Sigma$). Количество секущих хорд (N_Σ) порции потока имитирует количество, зондируемых сенсором (SPT) объектов (эллипсоидов) в порции ручейного потока. Величина относительного значения среднестатистической секущей хорды порции потока ($\hat{H}_{\Sigma/m} = H_\Sigma/N_\Sigma d_{m\Sigma}$), является среднестатистической хордой виртуального среднестатистического эллипсоида вращения порции ручейного потока. На ее основе, с помощью известной [3] базовой функции перехода для эллипса, определяется коэффициент

кругового сжатия $k_{o\Sigma \rightarrow} \cong k_i = f(\hat{H}_{\Sigma/m})$ виртуального среднестатистического эллипсоида вращения порции ручейного потока.

Объем порции ручейного потока, состоящей из смеси эллипсоидов.

Совокупный объем в монолите порции ручейного потока, состоящей из смеси эллипсоидов, представляет произведение объема (\bar{V}_i) виртуального среднестатистического эллипсоида вращения порции ручейного потока на количество всех объектов (N_{Σ}) этой порции

$$V_{\Sigma} = \bar{V}_i * N_{\Sigma} = \frac{\pi}{6} d_{m\Sigma}^3 k_{o\Sigma \rightarrow}^2 * N_{\Sigma} \text{ (mm}^3\text{)}; \quad (1)$$

Средний, за время (τ), объемный расход порции ручейного потока

$$Q_{V\tau} = \frac{\pi}{6\tau} d_{m\Sigma}^3 k_{o\Sigma \rightarrow}^2 * N_{\Sigma} \left(\frac{\text{mm}^3}{\text{ms}} \right). \quad (2)$$

Были рассмотрены, ранее смоделированные массивы секущих хорд различных типов смесей и их комбинаций. В каждом случае производился расчет по формуле (1) объема смеси эллипсоидов в монолите и расчет суммарного объема эллипсоидов, составляющих данную смесь. Относительная погрешность, возникающая при сравнении рассчитанных объемов, колебалась в широких пределах. В тех смесях, в которых, по мере увеличения крупности узких фракций, форма эллипсоидов изменялась гармонично (равномерно) в одну сторону, погрешность колебалась в пределах $\delta_{\Delta V} = \pm 10\%$. В случаях негармоничных (скачкообразных, неравномерных) изменений формы в отдельных фракциях крупности, погрешность достигала $\delta_{\Delta V} = \pm 35\%$.

С целью минимизации погрешности при расчете объема порции смеси, методом подбора были составлены скорректированные частные функции перехода к коэффициенту сжатия $\check{k}_{i\Sigma \rightarrow} = f(\hat{H}_{\Sigma/m})$ для различных типов смесей и их комбинаций. Полученное семейство тестовых частных функций, представлено на рис. 1. Там же, для сравнения, представлена базовая функция перехода для эллипса [3].

При расчете объема порции смеси, с помощью скорректированных частных функций перехода, относительная погрешность при гармоничном составе смеси колебалась в пределах $\delta_{\Delta V} = \pm 1\%$, а при негармоничном составе смеси, в пределах $\delta_{\Delta V} = \pm 15\%$.

Из сравнения функций перехода (Рис. 1) следует:

- все кривые частных функций перехода расположены по обе стороны и в непосредственной близости от аналогичной базовой функции для одиночного эллипса (проекции эллипсоида вращения);
- разброс кривых частных функций перехода (Рис. 1) объясняется накапливающейся систематической ошибкой дискретности, которая возникает при компьютерном моделировании [3] пошагово - вращающегося пе-

ременного множества параллельных хорд в одиночных эллипсах различного размера и формы и дальнейшем суммировании, полученных больших массивов ($10^5 - 10^9$) секущих хорд в различных комбинациях. Предполагается, что при реальном измерении массива секущих хорд с помощью сенсора (SPT), дискретная ошибка моделирования исчезнет или станет незначительной на фоне других предполагаемых ошибок измерения.

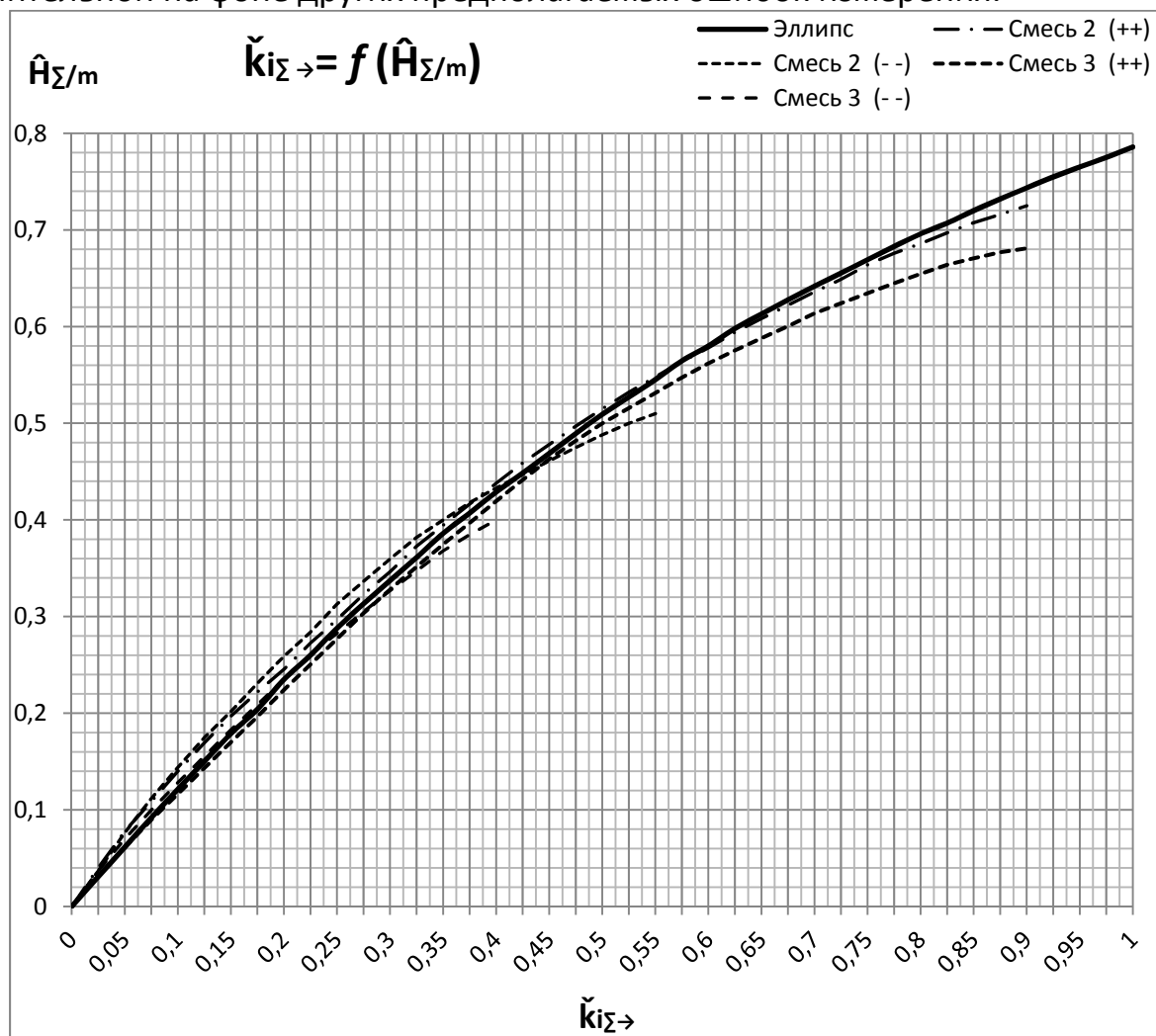


Рис. 1. – Тестовые частные функции перехода к скорректированному коэффициенту сжатия ($\check{k}_{i\Sigma \rightarrow}$) среднестатистического вытянутого эллипсоида вращения порции потока.

С целью дополнительной проверки правильности, рассмотренной методики расчета объемного расхода порции ручейного потока смеси эллипсоидов, произведена проверка формулы (2) на ее совместимость с аналогичной известной формулой.

В работе [1] представлена формула (3) для расчета среднего, за время (τ), объемного расхода плоских монослойных зернисто/кусковых потоков

$$Q_{V\tau} = v_{\tau} B f D \mu_1 = v_{\tau} B f D (1 - T_1); \quad (3)$$

где: v_τ – средняя, за время (τ), скорость потока в зоне измерения, mm/ms ;

B - ширина потока, mm ;

μ_1 - коэффициент поверхностного заполнения зёрнами монослойного потока зоны измерения, доли единицы;

T_1 - коэффициент незаполнения зёрнами монослойного потока площади зоны измерения или оптическая просветность потока непрозрачных зёрен, доли единицы ($\mu_1 + T_1 = 1$);

D – средневзвешенный по удельной поверхности размер зёрен потока, или согласно классификации С. Е. Андреева [1] среднегармонический диаметр смеси зёрен материала по массовому выходу (mm), $D = (\sum_{i=1}^k \frac{\gamma_i}{d_i})^{-1}$;

d_i и γ_i – соответственно средний диаметр и массовая доля i -й фракции крупности в смеси зерен;

f – коэффициент формы, согласовывает площадь (в формате $2D$) теневой проекции усредненного зерна порции потока на горизонтальную плоскость, с объемом (в формате $3D$), кажущейся для измерительной системы (SPT) цилиндрической фигуры. При этом предполагается, что зерна на плоскости расположены случайным образом и находятся в статическом, наиболее устойчивом состоянии.

В комплексном параметре (fD) коэффициент формы уточняет, какую долю занимает объем воображаемого средневзвешенного (D) зерна потока в объеме, кажущемся для измерительной оптической системы (SPT), цилиндрической фигуры.

Примечание 1. При критическом анализе, ранее произведенного [1] автором вывода формулы (3), выявлена незначительная неточность, что было причиной некоторой неопределенности при трактовке произведения (fD). Поэтому, по результатам моделирования, в данной работе изложена уточненная трактовка параметров ($f; D$), соответствующая предложенному методу расчета объема порции смеси эллипсоидов вращения.

Согласно определению [1], и с учетом *примечания 1*, коэффициент формы (f_i) среднестатистического зерна порции потока

$$f_i = V_i / S_i d_{i0}; \quad (4)$$

где: V_i, S_i, d_{i0} - соответственно объём, площадь проекции на горизонтальную плоскость и эквивалентный диаметр среднестатистического зёрна порции потока.

Произведение ($S_i * d_{i0}$), стоящее в знаменателе выражения (4), представляет из себя объем кругового цилиндра, если проекцией эквивалентной фигуры является круг. Если проекция имеет форму эллипса, то произведе-

ние представляет объем эллиптического цилиндра. Если проекцией является прямоугольник или квадрат, то произведение представляет объем прямоугольного параллелепипеда и так далее. Упомянутые объемы являются кажущимися для детектора точечной просветности (SPT). Величина реального объема (4) эквивалентной фигуры равна (V_i). Коэффициент формы (f_i) учитывает степень различия реального объема (V_i) фигуры от, кажущегося для (SPT), объема цилиндра $V_{zi} = S_{zi} * d_{zi}$.

Например, при эквивалентной фигуре в виде сферы, коэффициент формы равен

$$f_{io} = V_i/V_{zi} = \frac{\pi}{6} d_{io}^3 / \frac{\pi}{4} d_{io}^2 d_{io} = 2/3 = 0,6667; \quad (5)$$

где: d_{io} – эквивалентный диаметр, равный диаметру сферы.

Полученное выражение для сферической фигуры показывает, что объем сферы на треть меньше объема, кажущегося для (SPT), цилиндра.

При рассмотрении эквивалентной фигуры в виде вытянутого эллипсоида вращения, объем эллипсоида равен

$$V_{(eo)i} = \frac{\pi}{6} d_{ai} d_{bi} d_{ci} = \frac{\pi}{6} d_{ai} d_{bi}^2 = \frac{\pi}{6} d_{ai}^3 k_{oi \rightarrow}^2 = \frac{\pi}{6} d_{(eo)i}^3. \quad (6)$$

Откуда, эквивалентный диаметр ($d_{(eo)i}$) вытянутого эллипсоида вращения и вытянутого трехосного эллипсоида ($d_{(ebc)i}$), выраженные через соответствующие коэффициенты сжатия эллипсоида, равны

$$d_{(eo)i} = d_{ai} \sqrt[3]{k_{oi \rightarrow}^2}; \quad d_{(ebc)i} = d_{ai} \sqrt[3]{[0,5(k_{bi \rightarrow} + k_{ci \rightarrow})]^2}. \quad (7, 8)$$

Коэффициент формы при эквивалентной фигуре в виде вытянутого эллипсоида вращения, с учетом (7)

$$f_{(eo)i} = \frac{V_{(eo)i}}{V_{(eoz)i}} = \frac{\frac{\pi}{6} d_{ai}^3 k_{oi \rightarrow}^2}{S_{ei} * d_{(eo)i}} = \frac{\frac{\pi}{6} d_{ai}^3 k_{oi \rightarrow}^2}{\frac{\pi}{4} d_{ai}^2 k_{oi} * d_{(eo)i}} = 0,667 \sqrt[3]{k_{oi \rightarrow}}. \quad (9)$$

Полученные выражения верны и для частного случая, когда $k_{oi \rightarrow} = k_{bi \rightarrow} = k_{ci \rightarrow} = 1$ (сфера).

Проведенные автором практические исследования [1] показали, что, при различных технологических схемах рудоподготовки, для узких фракций крупности циркуляционных потоков кимберлитовой руды коэффициент формы зёрен стабилен и на интервале крупности [-50+5мм] колеблется в диапазоне $f = 0,43 - 0,47$. Для имитаторов шарообразной формы $f = 0,667$.

С помощью формул, представленных в данной работе, рассчитан коэффициент сжатия для эквивалентной модели среднестатистического зерна, измельченных и обкатанных кимберлитовых потоков, в виде вытянутого эллипсоида вращения. Полученные результаты расчета не противоречат визуальной оценке средней формы зерен циркуляционных потоков ($k_{oi \rightarrow} \cong 0,3$; $f \cong 0,45$).

На примере обкатанных циркуляционных потоков, в условиях действующего производства, когда известен гранулометрический состав смеси зерен потока и массовые доли (γ_i) каждой (i) фракции крупности в составе смеси, используя модель эквивалентного эллипсоида, можно традиционным методом определить средневзвешенный коэффициент формы для смеси зерен разной крупности и формы

$$f_{(eo)\Sigma} = \sum_{i=1}^n f_{(eo)i} \gamma_i = 0,667 \sum_{i=1}^n \gamma_i \sqrt[3]{k_{oi \rightarrow}}. \quad (11)$$

Аналогично, определяется средневзвешенный диаметр смеси зерен потока разной крупности и формы по их массовым выходам

$$D_{(eo)\Sigma} = \sum_{i=1}^n \gamma_i d_{(eo)i} = \sum_{i=1}^n \gamma_i d_{ai} \sqrt[3]{k_{oi \rightarrow}^2}. \quad (13)$$

При возвращении к виртуальному среднестатистическому эллипсоиду вращения порции ручейного потока смеси овалоидов, полученного в результате анализа массива секущих хорд на теневых проекциях порции ручейного потока, его основными параметрами являются - эквивалентный диаметр ($d_{(eo)i}$), коэффициент кругового сжатия ($k_{o\Sigma \rightarrow}$), величина наибольшей секущей хорды ($d_{m\Sigma}$) в измеренном массиве.

Для согласования формул (2) и (3), заменим в формуле (3) ширину (B) ручейного потока и величину средневзвешенного среднего диаметра (D) смеси на эквивалентный диаметр ($d_{(eo)i}$) среднестатистического эллипсоида вращения порции ручейного потока ($B = D = d_{(eo)i}$).

Приравнявая две формулы (2) и (3) для одной и той же порции ручейного потока, получены, представленные ниже, различные взаимозависимости между параметрами потока из разных формул

$$D = \frac{\pi d_{m\Sigma}^2 k_{o\Sigma \rightarrow} N_{\Sigma}}{4 \tau v_{\tau} \mu_1}; \quad (14)$$

$$f = 0,667 \sqrt[3]{k_{o\Sigma \rightarrow}}. \quad (15)$$

После подстановки в формулу (3) указанных замен и выражений (14, 15), получаем равенство формул (2) и (3)

$$Q_{V\tau} = v_{\tau} B f D \mu_1 = \frac{\pi d_{m\Sigma}^3 k_{o\Sigma \rightarrow}^2}{6 \tau} N_{\Sigma}. \quad (17)$$

Таким образом, подтверждена совместимость двух различных вариантов формулы для расчета среднего объемного расхода.

Выводы. Из массива секущих хорд, полученного в результате зондирования сенсором (*SPT*) точечной просветности достоверной порции ручейного (поштучного) потока смеси овалоидов, можно определить количество объектов потока и виртуальный среднестатистический вытянутый эллипсоид вращения, который отличается от ожидаемого. Он более длинный и более сжат, чем ожидаемый. Однако, на основе его параметров, доступных из массива секущих хорд, можно, с приемлемой погрешностью, рассчитать

его объем. Для этого используется известная базовая функция перехода от среднестатистической хорды эллипса к коэффициенту сжатия эллипса. Эквивалентный диаметр среднестатистического эллипсоида является показателем средней крупности объектов потока и, предположительно, аналогом средневзвешенного диаметра порции потока.

Произведение объема виртуального среднестатистического эллипсоида порции ручейного потока на количество объектов в порции за заданное время зондирования, позволяет рассчитать суммарный объем в монолите порции ручейного потока и средний объемный расход ручейного потока за заданное время измерения.

Доказана принципиальная возможность использования сенсора точечной просветности для измерения объемного расхода ручейного потока оваллоидов.

Рассмотренный метод расчета рекомендуется применять, в первую очередь, для контроля стационарных обкатанных зернисто/кусковых технологических потоков, таких, как например: циркуляционные потоки горнообогатительных производств, потоки товарного керамзита и т.п.

Нерешенные задачи. В данной работе рассмотрены идеализированные потоки, в которых оси вращения эллипсоидов параллельны плоскости их теневых проекций. В реальных потоках ориентация отдельных объектов потока в зоне измерения является случайной, зависящей от угла наклона вектора скорости потока, стесненности движения, формы объектов потока и других физико-механических факторов. Учет указанных факторов является задачей следующего этапа исследований.

Полученные результаты вычислительных экспериментов, на основе компьютерного моделирования множества секущих хорд, необходимо проверить и уточнить на физической модели измерения расхода ручейного потока путем его зондирования сенсором (*SPT*) точечной просветности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Волков А.М., Аннов А.А. Индикация производительности радиометрического сепаратора. //Обогащение руд, М., 1991. - №4. - С. 3-6.
2. А.с. SU № 1734881. Способ определения прозрачности сырьевого потока./ Аннов А. А., Волков А. М., Карпенко Ю. Н., 1990.
3. Annov, A., Annov, A.: Average chords and diameters of the ellipse. –LAP, LAMBERT Akademic Publishing, 2014. - 50 s.
4. М.Я. Выгодский. Справочник по высшей математике. М., 1998. – 846 с.