

Рисунок 1 – Методологія застосування ІТОЛП в умовах СОТРС

## ЛІТЕРАТУРА

1. E.Skakalina. Applied aspects of the use of genetic algorithms in transport tasks // Вісник КрНУ імені Михайла Остроградського . Серія «Інформаційні системи і технології. Математичне моделювання».- Кременчуг, 2015.- Вип.2/2015(91). Частина 2. – с.34-41.

2. Mamdani E.H. Application of fuzzy algorithms for control of simple dynamic plants // Proc. Inst. lect. Eng. – 1974. – Vol.121, № 12. – P. 1585-1588.

УДК 519.711.3

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ СОЛЕНОИДОВ И ПОСТОЯННЫХ МАГНИТОВ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ С ЦЕЛЮ СРАВНЕНИЯ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

**Ю.Н. Слесарев<sup>1</sup>, А.А. Воронцов<sup>2</sup>, К.М. Рябова<sup>3</sup>**

<sup>1</sup> д.т.н., профессор кафедры "Вычислительные машины и системы", Пензенский Государственный Технологический Университет, г. Пенза, Россия, e-mail: [slesarevun@gmail.com](mailto:slesarevun@gmail.com)

<sup>2</sup> к.т.н., доцент кафедры "Вычислительные машины и системы", Пензенский Государственный Технологический Университет, г. Пенза, Россия, e-mail: [aleksander.vorontsov@gmail.com](mailto:aleksander.vorontsov@gmail.com)

<sup>3</sup> студент, гр.14ИВ1ба, Пензенский Государственный Технологический Университет, г. Пенза, Россия, e-mail: [riabova.ksenija@yandex.ru](mailto:riabova.ksenija@yandex.ru)

**Аннотация.** Целью работы является проведение математического моделирования магнитных полей постоянных магнитов и эквивалентных им соленоидов. В работе приводятся результаты моделирования магнитных полей постоянных магнитов цилиндрической формы и эквивалентных им соленоидам. Было установлено, что использование того или иного метода расчета определяется предъявляемой точностью и замена постоянного магнита эквивалентным соленоидом вносит погрешности в расчеты. В заключении сделаны соответствующие выводы.

*Ключевые слова:* математическая модель, метод моделирования, постоянный магнит, соленоид, эквивалентный соленоид, напряженность магнитного поля, магнитное поле сплошного магнита, математическое моделирование магнитных полей.

## MATHEMATICAL MODELLING OF MAGNETIC FIELDS OF SOLENOIDS AND PERMANENT MAGNETS OF THE CYLINDRICAL FORM FOR THE PURPOSE OF COMPARISON OF THE RECEIVED RESULTS

U.N. Slesarev<sup>1</sup>, A.A. Vorontsov<sup>2</sup>, K.M. Riabova<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Ph.D., professor of department "Computers and Systems", Penza State Technological University, Penza, Russia, e-mail: [slesarevun@gmail.com](mailto:slesarevun@gmail.com)

<sup>2</sup> Ph.D., lecturer of department "Computers and Systems", Penza State Technological University, Penza, Russia, e-mail: [aleksander.vorontsov@gmail.com](mailto:aleksander.vorontsov@gmail.com)

<sup>3</sup> student, Penza State Technological University, Penza, Russia, e-mail: [riabova.ksenija@yandex.ru](mailto:riabova.ksenija@yandex.ru)

**Abstract.** The purpose of work is carrying out mathematical modeling of magnetic fields of permanent magnets and solenoids equivalent to them. Results of modeling of magnetic fields of permanent magnets of a cylindrical form and equivalent him to solenoids are given in work. It has been established that use of this or that method of calculation is defined by the shown accuracy and replacement of a permanent magnet with the equivalent solenoid brings errors in calculations. In the conclusion the corresponding conclusions are drawn.

*Keywords:* mathematical model, modeling method, permanent magnet, solenoid, equivalent solenoid, tension of magnetic field, magnetic field of a continuous magnet, mathematical modeling of magnetic fields.

**Введение.** При анализе процессов в магнитоотрицательных преобразователях линейных перемещений (МПЛП) и магнитоотрицательных преобразователей углов наклона (МПУН) необходимо принимать в расчет величину и распределение магнитного поля создаваемого как постоянным магнитом, так и соленоидом.

В теории магнетизма доказывається [1], что магнитное поле постоянного магнита эквивалентно магнитному полю от тока, протекающего по по-

верхности, совпадающей с боковой поверхностью магнита [2-12]. В [2] приведены рассуждения о замене соленоида магнитом, но также не приведены результаты количественных сравнений.

С инженерной точки зрения реализовать протекание тока в поверхностном слое бесконечно малой толщины сложно, а аналогом такого устройства является соленоид, в котором ток протекает в объемном слое, то представляет интерес сравнить распределения магнитных полей постоянного магнита и однослойного соленоида с конечной толщиной провода. Исследованиям математических моделей постоянных магнитов и эквивалентных им соленоидов, а также вычислительным экспериментам над ними посвящена статья.

**Теоретические исследования.** Известно, что постоянный магнит с аксиальным направлением намагниченности, в частности, цилиндрический можно рассматривать как однослойный соленоид с бесконечно тонкой обмоткой, геометрически соответствующей боковой поверхности магнита, по которой течет намагничивающий ток  $I$ . Условием эквивалентности магнита и соленоида является равенство их магнитных моментов.

Магнитный момент магнита может быть найден по известной формуле

$$P = M \cdot V = M \cdot S \cdot h \quad (1)$$

где  $M$ - намагниченность магнита;

$V$ - объем магнита;

$S$ - площадь сечения;

$h$ - высота магнита.

Магнитный момент эквивалентного соленоида можно рассчитать по формуле:

$$P = j \cdot h \cdot S \quad (2)$$

где  $j = I/h$  - линейная плотность намагничивающего тока.

Анализ формул (1) и (2) позволяет сделать вывод, что для вычислений магнитного момента эквивалентного соленоида необходимо равенство значений  $j$  и  $M$ , то есть  $j = M$ .

Для материалов с прямоугольной петлей гистерезиса намагниченность  $M$  можно определить как  $M \cong B_r / \mu_0$ , где  $B_r$  - остаточная индукция,  $\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м - магнитная постоянная. Линейную плотность намагничивающего тока эквивалентного соленоида с учетом необходимого равенства  $j$  и  $M$ , можно выразить приближенной формулой  $j \cong B_r / \mu_0$ .

Используя закон Био-Савара и подход изложенный в [3] для соленоида конечных радиусов обмотки  $R_1$  и  $R_2$  и конечной высоты  $h$ , изображенного на рисунке 1а было получено выражение для осевой составляющей магнитного поля соленоида  $H_{sz}(r, z)$ .

$$H_{sz}(r, z) = \frac{j}{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \sum_{\nu=1}^2 (-1)^\nu \frac{(z - z'_\nu)}{\sqrt{(z - z'_\nu)^2 + (r - r')^2}} \left[ K(k_\nu) + \frac{r - r'}{r + r'} \right] \Pi(h, k_\nu) dr' \quad (3)$$

где  $K(k_\nu) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - (k_\nu^2) \sin^2(\beta)}}$  - полный эллиптический интеграл

первого рода;

$$\Pi(h, k_\nu) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\beta}{(1 - h \sin^2(\beta)) \cdot \sqrt{1 - (k_\nu^2) \sin^2(\beta)}} - \text{полный эллиптиче-}$$

ский интеграл третьего рода,  $h = \frac{4rr'}{(r + r')^2}$

$$k_\nu = \sqrt{\frac{4rr'}{(z - z'_\nu)^2 + (r + r')^2}} - \text{параметр;}$$

$R_1, R_2$  - внутренний и внешние радиусы соленоида;

$z'_2 = b$  - расстояние от нижнего торца катушки до начала координат;

$z'_1 = b + h_s$  - расстояние от верхнего торца катушки до начала координат;

нат;

$h_s$  - высота соленоида;

$j$  - плотность тока в витках соленоида, в А/ м<sup>2</sup>;

$r, z$  - координаты точки наблюдения;

$r'$  - переменная интегрирования.

Для анализа магнитных полей соленоида при задании значения плотности тока  $j$  также следует учитывать коэффициент заполнения обмотки  $\lambda \cong \pi/4$ .

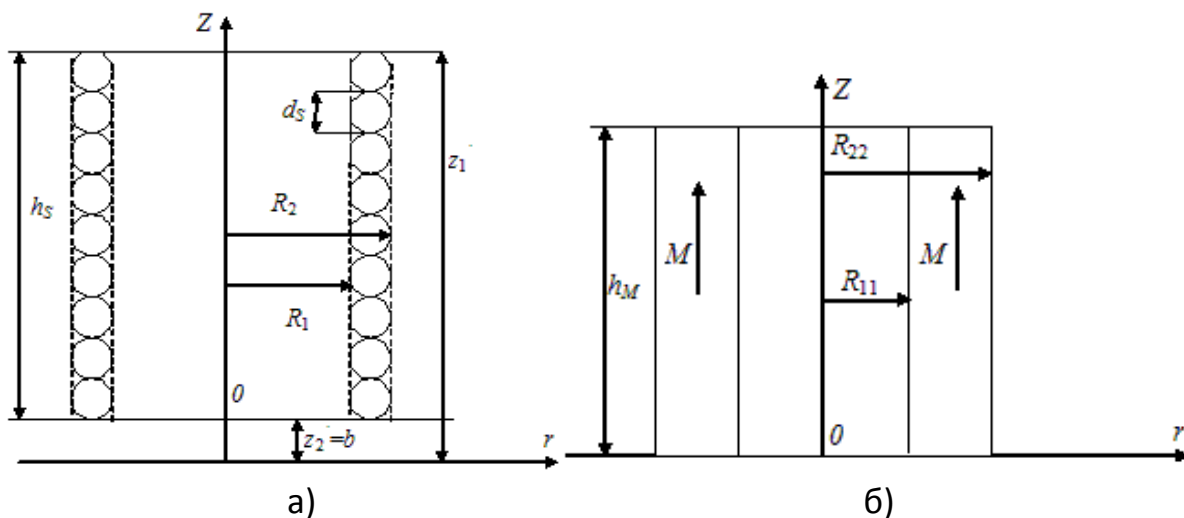


Рисунок 1- Математические модели магнитных полей постоянного магнита (а) и эквивалентного ему соленоида (б)

Для постоянного кольцевого магнита с намагниченностью  $M$  и с внешним и внутренним радиусами соответственно  $R_{22}$  и  $R_{11}$  (рисунок 16), осевую составляющую напряженности магнитного поля  $H_{mz}(r, z)$  можно определить по формуле [4]:

$$H_{mz}(r, z) = \frac{1}{4\pi} [H_{z2}(r, z) - H_{z1}(r, z)] \quad (4)$$

$$\text{где } H_{z2}(r, z) = 4 \cdot \int_{R_1}^{R_2} M \cdot \rho \cdot z \cdot E_2(k_2) \cdot \frac{1}{[(r - \rho)^2 + z^2] \cdot \sqrt{(r + \rho)^2 + z^2}} d\rho ;$$

$$H_{z1}(r, z) = 4 \cdot \int_{R_1}^{R_2} \left( \frac{M \cdot \rho \cdot (z - h_M) \cdot E_2(k_1) \times}{[(r - \rho)^2 + (z - h_M)^2] \cdot \sqrt{(r + \rho)^2 + (z - h_M)^2}} \right) d\rho ;$$

$$E_2(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2(\varphi)} \cdot d\varphi \text{ полный эллиптический интеграл второго}$$

рода

$$k_1 = \frac{4 \cdot r \cdot \rho}{(r + \rho)^2 + (z - h_M)^2} ; \quad k_2 = \frac{4 \cdot r \cdot \rho}{(r + \rho)^2 + z^2}$$

$r$  - расстояние от центра постоянного магнита до точки наблюдения,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} ,$$

$h_M$  - высота постоянного магнита;

$z$  - координата в направлении, перпендикулярном плоскости магнита,

$\rho$  - полярный радиус, определяемый расстоянием от центра постоянного магнита до точки, лежащей на его верхней или нижней поверхности,

$$\rho = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} .$$

Таким образом, для проведения вычислительных экспериментов при моделировании магнитных полей постоянного магнита и эквивалентного ему соленоида, будем использовать выражения (4) и (3) соответственно.

**Вычислительный эксперимент.** Для проведения вычислительных экспериментов будем использовать сплошные постоянные магниты ( $R_{11}=0$ ) и эквивалентные им соленоиды высотой  $h_M = h_S = h$ . Намагниченность  $M$  постоянного магнита и соответствующую ей линейную плотность тока соленоида  $j$  принимаем равной  $M = j = 5000$  А/м. Расстояние от торца соленоида до

начала координат  $b$  для удобства проведения вычислительного эксперимента, принимаем равным нулю ( $b=0$ ). Диаметр провода намотки соленоида  $d_s$  выбираем равной 0,2мм ( $d_s=0,2$ мм), намотка соленоида однослойная.

Для первого вычислительного эксперимента будем использовать постоянный магнит и соленоид радиусом  $R_1=R_{22}=2,5$ мм и высотой  $h=10$ мм. Результат моделирования изменения значений напряженностей магнитных полей вдоль оси  $OZ$  ( $r=0$ ) приведен на рисунке 2.

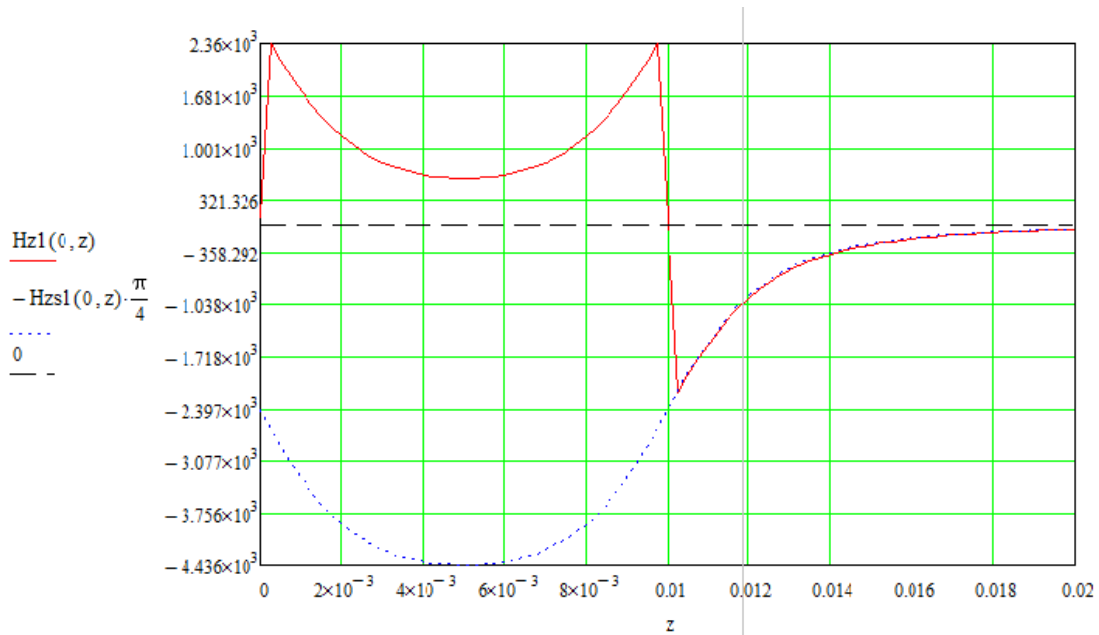


Рисунок 2 – Результат первого вычислительного эксперимента по сравнению распределений магнитных полей магнита и эквивалентного ему соленоида.  $R_1=R_{22}=2,5$  мм,  $h=10$  мм.

Анализ полученных результатов позволяет сделать вывод о полном несовпадении магнитных полей внутри соленоида и постоянного магнита, а также вблизи его торца ( $z=0,01$ м). Однако, при удалении от поверхности на расстояние  $\approx 0,03$ мм ( $z \approx 0,0103$ м) значения напряженностей магнитных полей, созданных постоянным магнитом и эквивалентным ему соленоидом уже отличаются незначительно ( $\geq 1\%$ ).

Для исследования изменений в результатах моделирования магнитных полей постоянных магнитов и эквивалентных им соленоидов, проведем второй вычислительный эксперимент. Его результаты приведены на рисунке 3.

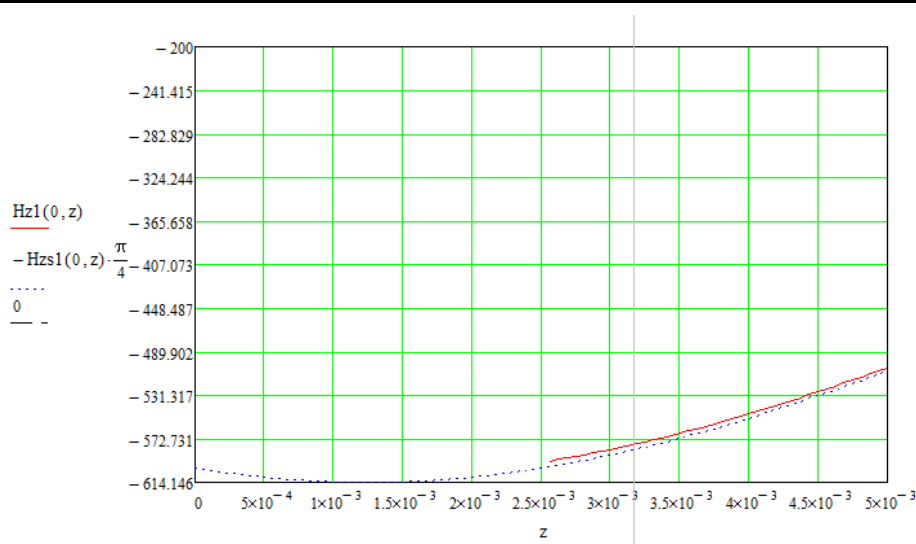


Рисунок 3 – Результат второго вычислительного эксперимента по сравнению распределений магнитных полей магнита и эквивалентного ему соленоида.  $R_1=R_{22}=10$  мм,  $h=2,5$  мм.

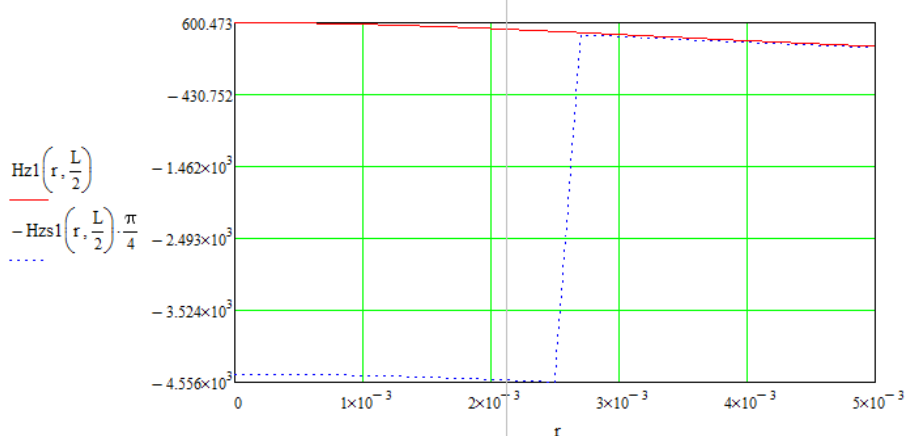


Рисунок 4 – Результат третьего вычислительного эксперимента по сравнению распределений магнитных полей магнита и эквивалентного ему соленоида.  $z=h/2$ ,  $R_1=R_{22}=2,5$  мм,  $h=10$  мм

Моделирование магнитного поля постоянного магнита осуществлялось лишь в области, где результаты моделирования отличались незначительно. Для вычислительного эксперимента использовались постоянный магнит и соленоид высотой  $h=2,5$  мм и радиусом  $R_1=R_{22}=10$  мм. Анализ результатов позволяет сделать вывод, что на расстоянии, приблизительно равным  $0,13$  мм от верхнего торца ( $z \approx 2,63 \cdot 10^{-3}$  мм) результаты моделирования отличаются не более, чем на 1% ( $\geq 1\%$ ).

Результаты вычислительных экспериментов по исследованию напряженностей магнитного поля вдоль оси  $Or$  при  $z=h/2$ , проведенные на рисунках 4 и 5, также свидетельствуют о несовпадении значений как внутри постоянного магнита и соленоида, так и вблизи их поверхностей. Для вычис-

лительных экспериментов были использованы постоянный магнит и соленоид радиусами  $R_1=R_{22}=2,5\text{мм}$  и  $R_1=R_{22}=10\text{мм}$  и высотой  $h=10\text{мм}$  и  $h=2,5\text{мм}$  для третьего и четвертого вычислительных экспериментов соответственно.

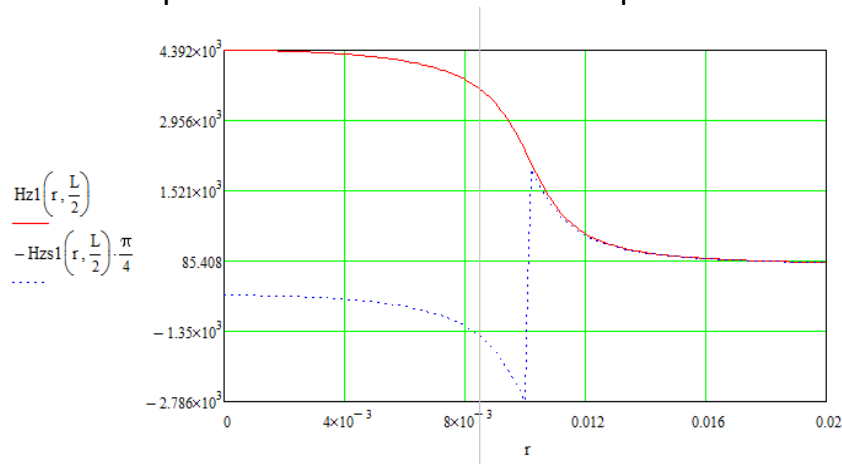


Рисунок 5 – Результат четвертого вычислительного эксперимента по сравнению распределений магнитных полей магнита и эквивалентного ему соленоида.  $z=h/2$ ,  $R_1=R_{11}=10\text{ мм}$ ,  $h=2,5\text{ мм}$ .

**Выводы.** Таким образом, в результате вычислительных экспериментов было впервые произведено сравнение результатов моделирования магнитных полей, полученных для постоянных магнитов и эквивалентных им соленоидов. Анализ результатов моделирования, приведенных на рисунках 2 – 5, позволил сделать вывод о несовпадении значений напряженностей магнитных полей как внутри постоянного магнита и соленоида, так и вблизи их поверхностей. При незначительном отдалении от поверхностей, результаты моделирования магнитных полей отличаются незначительно ( $\geq 1\%$ ). Однако, так как на практике создать бесконечно тонкий слой соленоида невозможно, то реальное расхождение результатов может быть более значительным. Поэтому, возможность использования для расчетов значений напряженности метода эквивалентного соленоида определяется лишь допустимой погрешностью расчетов. В случаях, когда допустимую погрешность измерений напряженностей магнитных полей постоянных магнитов необходимо минимизировать, рекомендуется использование математической модели постоянного магнита, приведенной в [4].

## ЛИТЕРАТУРА

1. В.А. Говорков Электрические и магнитные поля. Гос. энергет. издат-во, М.-Л., 1960, с. 179.
2. И.Е Тамм. Основы теории электричества. Издательство «Наука» , М. 1976г., с.252.



3. Расчет электрических цепей и электромагнитных полей на ЭВМ/ М.Г. Александрова, А.Н. Белянин, В Брюкнер и др.: Под ред. Л.В. Данилова и Е.С. Филиппова.- М.: Радио и связь, 1983.- 344 с.
4. Воронцов А.А. Исследование изменения быстродействия при удаленном подключении по сети интернет к рабочему столу виртуальной машины частного облака ПензГТУ. XXI век: итоги прошлого и проблемы настоящего плюс. 2016. № 3 (31). С. 173-178.
5. Мартышкин А.И., Бикташев Р.А., Воронцов А.А. Численный метод для определения пропускной способности приоритетного потока заявок в многопроцессорной системе с общим диспетчером задач по каждому конкретному типу приоритета. XXI век: итоги прошлого и проблемы настоящего плюс. Пенза: ПензГТУ. - 2014. № 3 (19). С. 137-145.
6. Слесарев Ю.Н., Воронцов А.А., Родионов С.В., Зелик А.М. Моделирование магнитной системы конструкций двухкоординатных магнитострикционных наклономеров с расположением магниточувствительных элементов под углом 90 градусов. Новое слово в науке: Перспективы развития. Чебоксары: ООО ЦНС "Интерактив плюс". - 2014. № 1 (1). С. 238-240.
7. Слесарев Ю.Н., Воронцов А.А., Шабнов Р.В., Шувалова И.В. Исследование оптимального значения результирующей напряженности магнитного поля в двухкоординатных магнитострикционных наклономерах с использованием кольцевых постоянных магнитов. Информационные технологии. Радиоэлектроника. Телекоммуникации. Тольятти: Поволжский государственный университет сервиса. - 2013. № 3. С. 316-322.
8. Слесарев Ю.Н., Родионов С.В., Конопацкий Ю.В., Воронцов А.А. Математическое моделирование и исследования новых конструкций подкласса двухкоординатных магнитострикционных наклономеров. Современные информационные технологии. Пенза: ПензГТУ. - 2014. № 20. С. 45-50.
9. Slesarev Yu.N., Vorontsov A.A., Rodionov S.V. The mathematical modeling and calculation of magnetic fields two-co-ordinate magnetostrictive tiltmeters taking into account skin-effect. Наука и технологии. London: SCIEURO. - 2015. № 1. С. 8-18.
10. Slesarev U.N., Vorontsov A.A., Rodionov S.V. Mathematical modelling of optimum distance from the continuous constant magnet to the waveguide. Japanese Educational and Scientific Review. Tokio: Japanese educational and scientific review. - 2015. Т. XI. № 1 (9). С. 716-722.
11. Слесарев Ю.Н., Ермолаев Н.А., Воронцов А.А., Мартышкин А.И. Математическое моделирование оптимального расстояния от кольцевого постоянного магнита до звукопровода с помощью разработанного комплекса программ "Двухкоординатный МН". Современные информационные технологии. Пенза: ПензГТУ. - 2013. № 18. С. 157-162.
12. Слесарев Ю.Н., Воронцов А.А., Маркин Д.И., Дарченко Т.В. Анализ и математическое моделирование эффективно проводящего слоя в двухкоординатных магнитострикционных наклономерах. Информационные технологии. Радиоэлектроника. Телекоммуникации. Тольятти: Поволжский государственный университет сервиса. - 2013. № 3. С. 311-315.